به نام خدا

مثال اول: یک معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(1-t/5)x=t \quad , \quad B.C1)\ x(1)=2, \quad B.C2)\ x(3)=-1$$

الف) نرمال کردن محدوده تغییرات متغیر مستقل:

$$t=(b-a)s+a \quad , \quad t\in[a,b] \ , \ a=1 \ , \ b=3$$

$$\Rightarrow t=2s+1 \quad , \quad dt/ds=2 \quad , \quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\,dx/ds \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2}=1/4\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{ds^2}-1.6(2-s)x=4(2s+1) \quad , \quad x(0)=2, \quad x(1)=-1$$

ب) تبدیل به فرم دستگاه معادلات درجه اول:

فرض: $x_1=x \ , \ x_2=dx/ds=2\,dx/dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx_1/ds = x_2 \\ dx_2/ds = 1.6(2-s)x+4(2s+1) \end{cases} \quad , \quad x_1(0)=2, \quad x_1(1)=-1$$

ج) حل معادله به روش shooting method: که برنامه نوشته شده در MATLAB به پیوست ارائه شده است:

- برنامه اصلی: bvp_example1_SM.m
- تابع معادلات: model1.m

- در روش فوق از دو حدس اولیه $x_2(0)$ برابر با -1.5 و -3 استفاده شده است.
- روش حل عددی IVP در مطلب ode45 می‌باشد.
- برای تعیین حدس جدید $x_2(0)$ از درون‌یابی خطی استفاده شده است.

در روش فوق با توجه به خطی بودن معادله دیفرانسیل، پس از یک مرحله درون‌یابی، جواب x برحسب s حاصل می‌شود. نتایج x و s در ماتریس result_SM1 ذخیره شده است. ستون اول s و ستون دوم x می‌باشد.

د) حل معادله بروش Central finite difference: کد برنامه نوشته شده در MATLAB به پیوست با نام <bvp_example1_FD.m> ارائه شده است. معادلات گسسته بکار رفته عبارت است از:

تقریب مشتق: $\quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \quad n+1$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow x_{i+1}+x_{i-1}-\left[2+1.6(2-s_i)h^2\right]x_i = 4h^2(2s_i+1) \quad , i=2,\dots,n$$

$$\text{یا} \quad x_{i-1}-\left[2+1.6(2-s_i)h^2\right]x_i + x_{i+1} = 4h^2(2s_i+1) \quad , x_1=2 , x_{n+1}=-1$$

$$\text{یا} \quad f(X)=0 \quad , X=\begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad f(X)=\begin{bmatrix} 2-\left[2+1.6(2-s_2)h^2\right]x_2+x_3-4h^2(2s_1+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}-\left[2+1.6(2-s_n)h^2\right]x_n+1-4h^2(2s_n+1) \end{bmatrix}$$

حل $f(x)$ در فایل <model1_d.m> تعریف شده است. با انتخاب اندازه قدم $h=0.05$ دقت کاملاً تقریباً مشابه روش shooting با ode45 بدست آمده. نتایج در ماتریس result_FD1 ذخیره شده است.

مثال دوم: یک معادله دیفرانسیل درجه دوم غیرخطی

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(1-t/5)x\frac{dx}{dt}=t , \quad \text{B.C1) } x(1)=2 , \quad \text{B.C2) } x'(3)=0.8$$

الف) نرمال کردن حدود تغییرات متغیر مستقل:

$$t=2s+1 , \quad dx/dt = \tfrac{1}{2}\, dx/ds , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{ds^2}-0.8(2-s)x\frac{dx}{ds} = 4(2s+1) \quad , x(0)=2, \quad x'(1)=1.6$$

ب) تبدیل فرم دستگاه معادلات درجه اول:

$$x_1=x , \quad x_2=dx/ds = 2\,dx/dt$$

$$, x_1(0)=2 \quad , x_2(1)=1.6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx_1/ds = x_2 \\ dx_2/ds = 0.8(2-s)x_1x_2+4(2s+1) \end{cases}$$

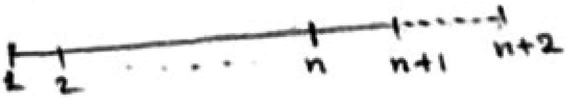
ج) حل معادله به روش Shooting method: که برنامه نوشته شده در MATLAB به پیوست ارائه شده است:

- برنامه اصلی: bvp_example2_SM.m
- تابع معادلات: model2.m

- در روش فوق از دو حدس اولیه $x_2(0)$ برابر با -1.5 و -3 استفاده شده است.

- نتایج حاصل برای x و x' در ماتریس result_SM ذخیره است. ستون اول t، ستون دوم x و ستون سوم $x' = dx/dt$ را باشد (تعداد ۸ مرحله جواب حاصل می‌شود).

د) حل معادله به روش finite difference:



$$\left\{ \left(\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}\right) - 0.8(2 - s_i)x_i\left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}\right) = 4(2s_i + 1) \quad \text{for } i = 2, n+1 \right. \quad \text{و} \quad x_1 = 2$$

$$\text{BC2)} \quad \frac{x_{n+2} - x_n}{2h} = 1.6$$

که برنامه نوشته شده به پیوست ارائه شده است.

- برنامه اصلی: bvp_example2_FD.m
- تابع $F(x)=0$: model2_d.m

با انتخاب تعداد تقسیمات برابر با $n = 30$، دقت روش تفاضل محدود تقریباً مشابه روش shooting می‌باشد.

- پایان -