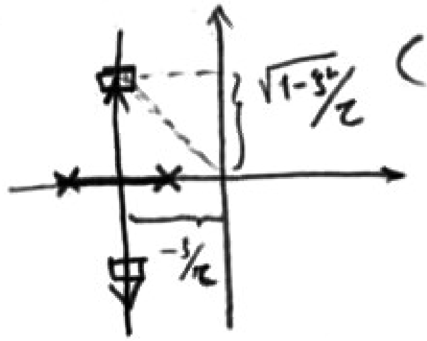
- مروری بر طراحی کنترل کننده‌های تناسبی براساس مکان هندسی

★ **قدم اول**: تعیین اهداف کنترل: معمولاً میزان فرارفت (OS) بعنوان هدف کنترل تعیین می‌گردد.

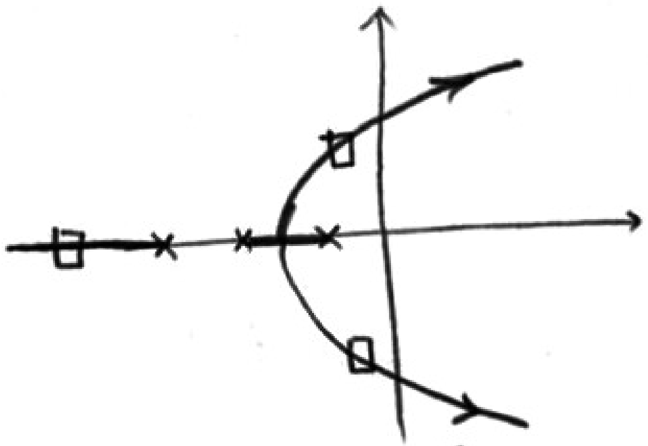
با توجه به اینکه فرارفت برای یک سیستم درجه دو تعریف می‌شود، لذا موقعی می‌توان از این روش استفاده نمود که سیستم حلقه بسته دارای دو قطب غالب باشد.

الف)



* سیستم حلقه بسته فقط دارای دو قطب می‌باشد.

ب)



* سیستم حلقه بسته دارای سه قطب بوده ولی دو قطب آن غالب می‌باشند (نزدیک محور موهومی)

★ **قدم دوم**: تعیین محل دو قطب غالب بنحوی که هدف کنترلی مورد نظر (فرارفت)، برآورده شود. و سپس تعیین بهره کنترل کننده براساس محل دو قطب غالب.

- جهت استفاده از روش فوق در نرم‌افزار matlab می‌توان بصورت زیر عمل نمود:

۱- تابع تبدیل مدار باز حلقه کنترل با استفاده از دستور "tf" تعریف شود.

۲- با استفاده از دستور rlocus، محل قطب‌های مدار بسته با توجه به مقادیر K تعیین شود

$[R, K] = rlocus(sys)$, $s_1 = -\xi/\tau + j\sqrt{1-\xi^2}/\tau$

۳- برای شاخه مورد نظر (فقط با مقدار موهومی مثبت)، مقدار OS به ازای K محاسبه شود:

$$OS = \exp\left(\frac{\pi \times Re(s1)}{Im(s1)}\right) \Longleftarrow OS = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

۴- با میانیابی در داده‌های فوق K به ازای مقدار فرارفت مطلوب تعیین شود.

- مروری بر طراحی کنترل کننده‌های PI بر اساس مکان هندسی

* **قدم اول:** تعیین اهداف کنترلی که معمولاً میزان فراجهش (OS) و زمان نشست (ts) در نظر گرفته می‌شود. همانند حالت قبل این اهداف نیز بر اساس یک سیستم مرتبه دوم بیان شده‌اند، لذا در طراحی مدنظر از این روش استفاده می‌کنیم که سیستم حلقه بسته دارای دو قطب غالب باشد.

* **قدم دوم:** تعیین دو قطب غالب مطلوب با توجه به اهداف کنترلی

$$OS = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow \zeta = \frac{-\ln(OS)}{\sqrt{\pi^2+(\ln(OS))^2}}$$

$$t_s = \frac{4\tau}{\zeta} \Rightarrow \tau = \frac{t_s\zeta}{4} \xrightarrow[\text{مطلوب غالب}]{\text{قطب‌ها}} \boxed{s_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}}$$

* **قدم سوم:** تعیین محل صفر کنترل کننده PI

$$G_c = K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right) = K_c\left(\frac{s+1/\tau_I}{s}\right)$$

و معادله مشخصه: $1+G_cG_{OL}=0$

G_{OL} = کلیه توابع تبدیل مدار باز بدون کنترل کننده

طبق رابطه زاویه‌ها، نقطه‌ای که روی مکان قرار دارد، باید در رابطه زاویه‌ها صدق کند، یعنی داریم:

مضرب فردی از 180°: (معمولاً $k=0$ می‌باشد)

$$\measuredangle G_c(s_1) + \measuredangle G_{OL}(s_1) = -(2k+1)\pi$$

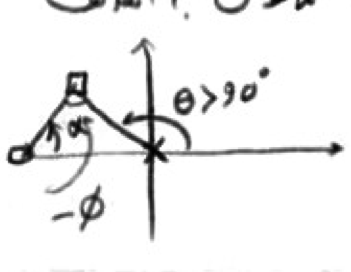
بنابراین می‌توان زاویه کنترل کننده PI را در s_1 محاسبه نمود:

$$\phi = \measuredangle G_c(s_1) = -(2k+1)\pi - \measuredangle G_{OL}(s_1) = \measuredangle\left(s_1+1/\tau_I\right) - \measuredangle(s_1) = \alpha-\theta$$

* توجه: α باید بزرگتر از صفر و کوچکتر از θ باشد *

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha = \phi+\theta > 0\\ 0<\alpha<\theta\end{cases}$$

در صورتیکه شرط زیر برآورده نشود، با یک کنترل کننده PI نمی‌توان به اهداف کنترلی رسید.



$$-\theta < \phi < 0$$

حال می‌توان محل صفر کنترل کننده را بصورت زیر محاسبه نمود:

$$\alpha = \measuredangle\left(s_1 + \frac{1}{\tau_I}\right) = \measuredangle\left(Re(s_1) + i\,Im(s_1) + \frac{1}{\tau_I}\right) \quad , \quad \tau_I =$$ همواره حقیقی است

$$\tan\alpha = \frac{Im(s_1)}{Re(s_1) + \frac{1}{\tau_I}} \Rightarrow \boxed{\tau_I = \frac{1}{\frac{Im(s_1)}{\tan\alpha} - Re(s_1)} > 0}$$

* قدم چهارم: تعیین بهره کنترل کننده با استفاده از رابطه قدرمطلق‌ها

$$|G_c(s_1)| \times |G_{oL}(s_1)| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_c = \frac{1}{|G_{oL}(s_1)| \times \left|1 + \frac{1}{\tau_I s_1}\right|}}$$

• که برنامه نوشته شده به پیوست برای کنترل‌کننده‌های P و PI ارائه شده است.

- مثال ۲-۱:

$$G_{oL} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad , \quad OS = 0.2 \, , \quad t_s = 5$$

کد برنامه: <example2-1.m>

$P(K_c = 8.83, OS = 19.9\%)$, $PI(K_c = 3.32, \tau_I = 0.77, OS = 22.2\%)$

در این حالت عملکرد کنترل کننده PI بهتر از P (با توجه به offset) می‌باشد.

- مثال ۲-۲:

$$G_{oL} = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} \approx \frac{(2-s)}{(s+1)(s+2)^2} \quad , \quad OS = 0.2 \, , \quad t_s = 10$$

پاسخ تولیدی دارای Inverse Response می‌باشد

کد برنامه: <example 2-2.m>

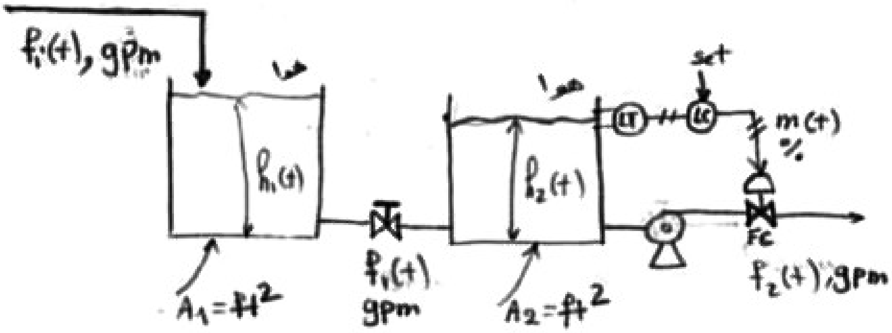
$P(K_c = 1.48, OS = 21.4\%)$, $PI(K_c = 1.2, \tau_I = 1.2, OS = 18.5\%)$

در این حالت کنترل کننده P دارای زمان نشست کمتری می‌باشد ولی مقدار offset آن زیاد است.

بنام خدا

طراحی سیستم‌های کنترل کمک کامپیوتر

مثال ۳-۲: طراحی کنترل کننده‌های P و PI به کمک مکان هندسی ریشه‌ها معادلات مشخص



$$
\begin{cases}
sp.gr = 1 \\
g = 32.174\ \frac{ft}{s^2},\ g_c = 32.174\ \frac{lbm\cdot ft}{lbf\cdot s^2} \\
\rho = \quad 60° = 62.4\ \frac{lbm}{ft^3} \\
f_1(t) = C_{v_{1max}}\, vp_1(t)\sqrt{\frac{\rho(h_1-h_2)g}{144\, g_c}} \\
\Delta P_v = 5.601\ psi
\end{cases}
$$

فرآیند :

$$A_1\frac{dh_1}{dt} = \left[f_i(t) - f_1(t)\right]\times\frac{1\ ft^3}{7.48\ gal}\ ,\quad A_2\frac{dh_2}{dt} = \left[f_1(t) - f_2(t)\right]\times\frac{1\ ft^3}{7.48\ gal}$$

شیر کنترل خطی :

$$\tau_v\frac{dvp_2(t)}{dt} = \frac{m(t)}{100} - vp_2(t)\ ,\quad f_2(t) = C_{v_{2max}}\, vp_2(t)\sqrt{\Delta P_v}$$

سنسور ارتفاع (ترنسمیتر اجزاء) :

$$h_{2m}(t) = \frac{100}{h_{2max}-h_{2min}}\,h_2(t) - \frac{100\,h_{2min}}{h_{2max}-h_{2min}}$$

- مشخصات فرآیند :

$$
\begin{cases}
A_1 = A_2 = 20\ ft^2,\ \bar{m} = 50\%,\ C_{v_{2max}} = 195,\ \bar{f}_2 = 230.75\ gpm = \bar{f}_i = \bar{f}_1 \\
\bar{v}p_1 = 0.5,\ C_{v_{1max}} = 640,\ \bar{h}_1 = 8\ ft,\ \bar{h}_2 = 6.8\ ft,\ \bar{v}p_2 = 0.5,\ \tau_v = 0.1\ min \\
h_{2max} = 12\ ft,\ h_{2min} = 4\ ft
\end{cases}
$$

مدل فرآیند :

$$A_1\frac{dh_1}{dt} = \left[f_i(t) - C_{v_{1max}}\, vp_1(t)\sqrt{\frac{\rho}{144}\left(h_1(t)-h_2(t)\right)}\right]\frac{1}{7.48}$$

$$
\begin{cases}
20\times 7.48\,\frac{dH_1}{dt} = F_i(t) - C_{v_{1max}}\sqrt{\frac{62.4}{144}}\left[\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}\ Vp_1(t) + \frac{\bar{v}p_1}{2\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}}H_1(t) - \frac{\bar{v}p_1}{2\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}}H_2(t)\right] \\
20\times 7.48\,\frac{dH_2}{dt} = C_{v_{1max}}\sqrt{\frac{62.4}{144}}\left[\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}\ Vp_1(t) + \frac{\bar{v}p_1}{2\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}}H_1(t) - \frac{\bar{v}p_1}{2\sqrt{\bar{h}_1-\bar{h}_2}}H_2(t)\right] \\
\qquad - C_{v_{2max}}\sqrt{\Delta P_v}\ Vp_2(t)
\end{cases}
$$

$$\left[20\times 7.48S + 640\sqrt{\frac{62.4}{144}} \times \frac{0.5}{2\sqrt{1.2}}\right] H_1(s) = F_i(s) - 640\sqrt{\frac{62.4\times 1.2}{144}}\, V_{P_1}(s) + \frac{640}{2}\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}} \times 0.5\, H_2(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_1(s) = \dfrac{K_1 F_i(s) - K_2 V_{P_1}(s) + K_3 H_2(s)}{\tau_1 S + 1}, \\[2ex] \tau_1 = \dfrac{20\times 7.48\times 2}{640\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}}\times 0.5} = \boxed{1.556\ \text{min}}, \quad k_1 = \dfrac{2}{0.5\times 640}\sqrt{\dfrac{144\times 1.2}{62.4}} = \boxed{0.0104} \\[2ex] k_2 = \dfrac{1.2\times 2}{0.5} = 4.8, \quad \boxed{k_3 = 1}, \end{cases}$$

$$\left[20\times 7.48S + \frac{640}{2}\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}} \times 0.5\right] H_2(s) = 640\sqrt{\frac{62.4\times 1.2}{144}}\, V_{P_1}(s) + \frac{640}{2}\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}} \times 0.5\, H_1(s) - 195\sqrt{5.601} \times V_{P_2}(s)$$

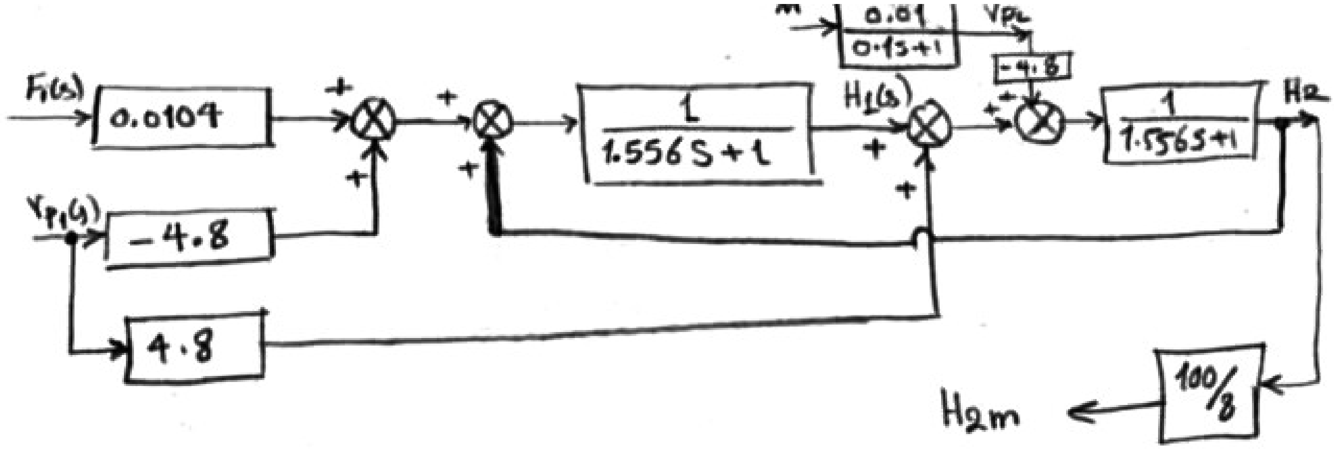
$$\Rightarrow \begin{cases} H_2(s) = \dfrac{K_4 V_{P_1}(s) + K_5 H_1(s) - K_6 V_{P_2}(s)}{\tau_2 S + 1} \\[2ex] \tau_2 = \dfrac{20\times 7.48\times 2}{640\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}}\times 0.5} = \boxed{\tau_1 = 1.556\ \text{min}}, \quad K_4 = \dfrac{2\times 1.2}{0.5} = K_2 = 4.8, \\[2ex] k_5 = k_3 = 1, \quad K_6 = \dfrac{195\sqrt{5.601}\times 2}{640\times 0.5\sqrt{\frac{62.4}{144\times 1.2}}} = \boxed{4.8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{0.0104 F_i(s) - 4.8 V_{P_1}(s) + H_2(s)}{1.556 S + 1}, \quad (\tau_v S + 1) V_{P_2}(s) = \frac{M(s)}{100}$$

تابع تبدیل شیر کنترل

$$H_2(s) = \frac{4.8 V_{P_1}(s) + H_1(s) - 4.8 V_{P_2}(s)}{1.556 S + 1} \quad \Rightarrow V_{P_2}(s) = \frac{0.01 M(s)}{(0.1 S + 1)}$$

تابع تبدیل سنسور: $\dfrac{H_{2m}(s)}{H_2(s)} = K_m = \boxed{\dfrac{100}{8}}$



- ساده کردن توابع تبدیل :

مدل فرآیند :

$$\frac{H_{2m}(s)}{M(s)}=\frac{\dfrac{-4.8\times 100/8\times\frac{1}{100}}{(0.1s+1)(1.556s+1)}}{1-\dfrac{1}{(1.556s+1)^2}}$$

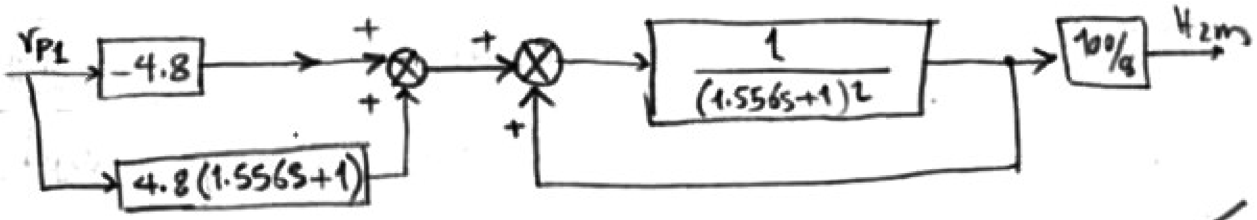
$$\Rightarrow \boxed{\frac{H_{2m}(s)}{M(s)}=\frac{-\frac{48}{8}(1.556s+1)}{(0.1s+1)\left[(1.556s+1)^2-1\right]}=\frac{-0.6(1.556s+1)}{s(0.2421s^2+2.7323s+3.112)}}\ \checkmark$$

مدل انتقال دبی ورودی :

$$\frac{H_{2m}(s)}{F_i(s)}=\frac{\dfrac{0.0104\times 100}{8}\times\dfrac{1}{(1.556s+1)^2}}{1-\dfrac{1}{(1.556s+1)^2}}=\frac{\dfrac{0.0104\times 100}{8}}{(1.556s+1)^2-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{H_{2m}(s)}{F_i(s)}=\frac{0.13}{s(2.421s+3.112)}}\ \checkmark$$

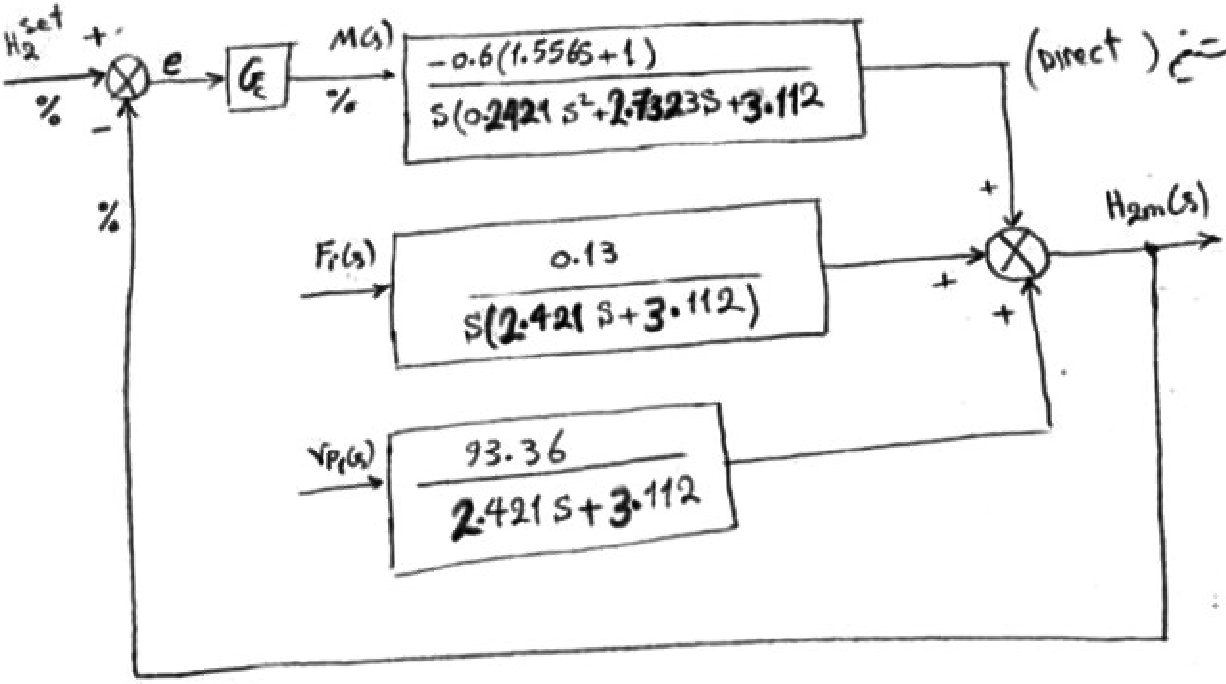
مدل انتقال میزان باز بودن شیر دستی :



$$\frac{H_{2m}(s)}{V_{P1}(s)}=\frac{4.8(1.556s)\frac{100}{8}\times\dfrac{1}{(1.556s+1)^2}}{1-\dfrac{1}{(1.556s+1)^2}}=\boxed{\frac{93.36}{(2.421s+3.112)}}\ \checkmark$$

مدل خطی نهایی همراه با کنترل کننده:

عملکرد کنترل کننده: مستقیم (Direct)



اهداف مثال:

۱- یک کنترل کننده تناسبی طوری طراحی کنید تا پاسخ مدار بسته ارتفاع مایع در تانک دوم، در صورت یک تغییر پله ای در مقدار مقرر دارای فرارفت (overshoot) حدود ۱۰٪ باشد.

۲- یک کنترل کننده PI طوری طراحی کنید تا پاسخ مدار بسته ارتفاع مایع در تانک دوم، در صورت یک تغییر پله ای در مقدار مقرر دارای فرارفت حدود ۱۰٪ و زمان نشست حدود ۳ دقیقه باشد.

۳- عملکرد سیستم های کنترل طراحی شده را در مواقع تغییرات پله ای در مقدار مقرر و تغییر در دبی ورودی با هم مقایسه کنید. پاسخ های حاصل را تجزیه و تحلیل کنید (نمودارهای حاصله را ارائه و شرح دهید).

- کد برنامه نوشته شده با استفاده از Control toolbox در فایل ضمیمه موجود است.
<example 2.3.m>

- در طراحی کنترل کننده تناسبی، از مفهوم overshoot به صورت زیر استفاده شده است:

قطب‌های غالب مدار درجه دوم: $s_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$, $\frac{Re(s_1)}{Im(s_1)} = \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

فراجهش: $OS = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow OS = \exp\left(\frac{\pi \times Re(s_1)}{Im(s_1)}\right)$ ✓

- بنابراین به ازای مقادیر مختلف بهره، می‌توان مقدار فراجهش را با کمک نمودار مکان هندسی و معادله فوق محاسبه نمود. سپس با میان‌یابی از مقادیر حاصل، مقدار بهره که به ازای آن میزان فراجهش برابر با 10 درصد می‌شود، قابل محاسبه خواهد شد.

$OS = 0.1$ نتیجه حاصل برای $\Rightarrow \boxed{K_c = 19.5}$ بهره کنترل کننده تناسبی (Direct طراحی)

- در طراحی کنترل کننده PI، از مفهوم قطب‌های غالب استفاده شده است:

$$OS = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \xi = -\ln(OS)\Big/\sqrt{\pi^2 + \ln(OS)^2}$$

$$t_s = \frac{4\tau}{\xi} \Rightarrow \tau = \frac{t_s\xi}{4} \rightarrow \boxed{s_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}}$$ قطب‌های غالب

$G_{OL}(s) =$ تابع تبدیل حلقه کنترل بدون کنترل کننده , $G_c(s) =$ تابع تبدیل کنترل کننده

مطابق قضیه زاویه‌ها اگر نقطه‌ای بر روی مکان هندسی قرار داشته باشد، باید در رابطه زاویه‌ها صدق کند. داریم:

$$\angle G_{OL}(s_1) + \angle G_c(s_1) = -(2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow \angle G_c(s_1) = \phi = -(2k+1)\pi - \angle G_{OL}(s_1) \checkmark$$

$$PI \xrightarrow{\text{برای}} \angle G_c(s_1) = \angle\left[\frac{1}{s_1}\left(s_1 + \frac{1}{\tau_I}\right)\right] = -\underbrace{\angle s_1}_{\theta} + \underbrace{\angle\left(s_1 + \frac{1}{\tau_I}\right)}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = \measuredangle\left(s_1 + 1/\tau_I\right) = \varnothing + \theta \checkmark$$, (α must be greater than zero)

$$\tan\alpha = \frac{Im\left(s_1 + 1/\tau_I\right)}{Re\left(s_1 + 1/\tau_I\right)} = \frac{Im(s_1)}{Re(s_1) + 1/\tau_I}$$, τ_I is real

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_I} = \frac{Im(s_1)}{\tan\alpha} - Re(s_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_I = \frac{1}{\frac{Im(s_1)}{\tan\alpha} - Re(s_1)}}$$

- تعیین بهره کنترل کننده با استفاده از رابطه قدر مطلق ها

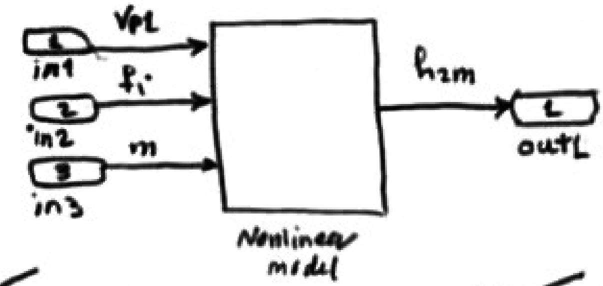
$$|G_{oL} \times G_c| = 1 \Rightarrow |G_{oL}(s_1)| \times \left|k_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s_1}\right)\right| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k_c = \frac{1}{|G_{oL}(s_1)| \times \left|1 + \frac{1}{\tau_I s_1}\right|}} \Rightarrow \boxed{G_c = 5.4\left(1 + \frac{1}{0.46 s}\right)}$$

فایل شبیه سازی مدل خطی و غیر خطی بصورت مدار بسته: <example2_3_close.slx>

- همانطور که از نتایج حاصل مشاهده می گردد مقدار فراجهش در سیستم مدار بسته با استفاده از کنترلر تناسبی کمتر از 10٪ می باشد، در صورتیکه در سیستم مدار بسته با استفاده از کنترلر PI این مقدار حدود 30٪ می باشد. علت این امر مربوط به صفر و قطب های حقیقی سیستم مدار بسته می باشد که محل آنها در نمودارها نشان داده شده اند. در صورت وجود صفر حقیقی پایدار در سیستم حلقه بسته (صفر سمت چپ) میزان فراجهش بیشتر از حد انتظار خواهد بود (بسته به نزدیکی یا دوری از محور موهومی). صفر سمت راست موجب Inverse Response می شود.

درمثال قبل مدل خطی فرآیند بصورت دستی و از طریق بسط Taylor تعیین گردید. بکمک توابع linmod و linmod2 نیز می‌توان مدل خطی یک سیستم غیرخطی شبیه‌سازی شده در Simulink را تعیین نمود. بدین منظور ابتدا مدل غیرخطی شبیه‌سازی شده را بصورتی تعریف کنید تا ورودی‌ها و خروجی‌های آن مشخص باشد، بصورت زیر



همانطور که مشاهده می‌گردد مدل مذکور دارای سه ورودی (v_{p1}، f_i و m) و یک خروجی (h_{2m}) می‌باشد. فایل مذکور با نام <example2_3_open.slx> در پیوست ارائه شده است. مدل مذکور دارای سه متغیر حالت می‌باشد. برای تشخیص ترتیب متغیرهای حالت و مقادیر اولیه آنها (نقطه تعادل) می‌توان از دستورهای زیر استفاده نمود:

```
>X = Simulink.BlockDiagram.getInitialState('example2_3_open')

>X.signals.values
```

$$\begin{array}{ccc} h_2 & h_1 & v_{p2} \end{array}$$
$$[6.8;\ 8;\ 0.5]$$

دستور فوق مقادیر اولیه بردار حالت را بصورت زیر ارائه می‌کند:

حال با استفاده از دستور linmod، مدل خطی بصورت زیر حاصل می‌شود:

x0 , u

```
> [a,b,c,d] = linmod('example2_3_open', [6.8;8;0.5], [0.5;230.75;50])
```

$$a=\begin{bmatrix} -0.6427 & 0.6427 & -3.0849 \\ 0.6427 & -0.6427 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 3.085 & 0 & 0 \\ -3.085 & 0.0067 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix} 12.5 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

حال با استفاده از دستور tf وتوان توابع تبدیل مابین خروجی و ورودی ها را بصورت زیر تعیین نمود:

```
> sys = ss(a,b,c,d)
> Gp = tf(sys)
```

با اجرا دستورات فوق داریم:

$$
\begin{cases}
\dfrac{H_{2m}(s)}{V_{PL}(s)} = \dfrac{38.56}{S+1.285} \\[2ex]
\dfrac{H_{2m}(s)}{F_i(s)} = \dfrac{0.0537}{S^2+1.285\,S} \\[2ex]
\dfrac{H_{2m}(s)}{M(s)} = \dfrac{-3.856\,S-2.478}{S^3+11.29\,S^2+12.85\,S}
\end{cases}
$$

مدل خطی حاصل

در فایل پیوست <example3_2_close.slx> ، مدل غیرخطی همراه با مدل خطی نمایش داده شده است.

* * *

مثال ۲-۴) همانند مثال قبل برای فرآیند شرح داده شده در مثال (۱) یک کنترل کننده P و PI طوری طراحی کنید تا $OV \cong 5\%$ و $t_s \simeq 2.5\,min$ باشد.

حل) که برنامه نوشته شده در فایل <example2_4.m> ارائه شده است. پارامترهای کنترل کننده های حاصل عبارتند از:

$P: \{K_c = 4.3,\ OV = 5\%\}$

$PI: \{K_c = 3.7,\ \tau_I = 1.14\,min,\ OV = 26.2\%\}$

همانگونه که مشاهده می گردد، کنترل کننده PI بعلت وجود صفر حلقه بسته اثر انتگرالی که موجود دارای فراجهش زیادی می باشد. سیستم حلقه بسته با استفاده از مدل خطی و غیرخطی در فایل پیوست <example2_4_close.slx> موجود است.