- روش تقریب محاسبه آنتالپی (مخلوط مایع):

داده‌های آزمایشگاهی مخلوط

$$\begin{cases}\tilde{h}_L \approx \tilde{C}_{P_L}(T_L - T_r) + \Delta \tilde{h}_{mix} \\ \tilde{C}_{P_L} = \sum_{i=1}^{NC} x_i \tilde{C}_{P_{L_i}}\end{cases}$$

(اگر مخلوط مایع ایده‌آل باشد $\Delta \tilde{h}_{mix} = 0$)

- معادله فوق برای زمانی نوشته شده است که ظرفیت حرارتی مایعات تقریباً ثابت است.

$T_L =$ دمای مخلوط مایع

- روش تقریب محاسبه آنتالپی (مخلوط گاز ایده‌آل):

$$\tilde{h}_G = \tilde{h}_G^{ig} = \sum_{i=1}^{NC} y_i \left(\int_{T_r}^{T_G} \tilde{C}^{ig}_{P_i}\, dT\right)$$

, $T_G =$ دمای مخلوط گاز

یا

$$\tilde{h}_G \approx \tilde{C}_{P_L}(T_G - T_r) + \tilde{\lambda}_G$$

, $\tilde{\lambda}_G =$ گرمای نهان تبخیر مخلوط مایع در دمای T_G $\left(\frac{J}{kmol}\right)$

$$\tilde{\lambda}_G = \sum_{i=1}^{NC} y_i \tilde{\lambda}_{G_i}$$

- نحوه محاسبه ترم تبادل حرارت سیال داخل حجم کنترل با دیواره (Q):

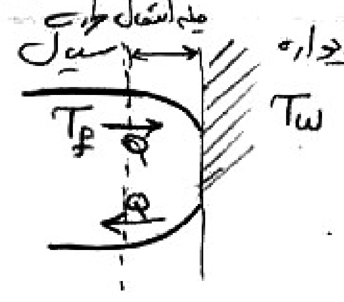
همانطور که می‌دانیم، سه روش انتقال حرارت وجود دارد که عبارتند از:

۱- انتقال حرارت از طریق هدایت (معمولاً در جامدات از این فرم استفاده می‌گردد) (Conduction heat transfer)

۲- انتقال حرارت از طریق جابجایی (معمولاً در سیالات و سیالی که در تماس با سطوح جامد است از این فرم انتقال حرارت استفاده می‌گردد) Convection heat transfer

۳- انتقال حرارت از طریق تابش (در مواقعی که سطوح خیلی داغ وجود دارد از این فرم انتقال حرارت استفاده می‌گردد). Rediation heat transfer

- برای محاسبه میزان انتقال حرارت از سیال به دیواره و یا بالعکس عموماً از فرم انتقال حرارت جابجایی به صورت زیر استفاده می‌گردد (Newton's cooling law):



معمولاً فرض می‌شود که در فیلمی از سیال نزدیک دیواره گرادیان دما وجود داشته و خارج از آن فیلم دما ثابت است ... به فیلم

مذکور، فیلم انتقال حرارت گفته می‌شود. هر چه سرعت حرکت سیال زیادتر باشد،
ضخامت فیلم انتقال حرارت کمتر خواهد بود. نیوتن رابطه زیر را برای محاسبه انتقال حرارت
مابین سیال و دیواره پیشنهاد نمود:

دمای دیواره — اختلاف پتانسیل

نرخ حرارت ورودی به سیال $(SI: \frac{J}{s})$

$$Q = h' S (T_w - T_f) = \frac{T_w - T_f}{1/h'S}$$

دمای سیال — مقاومت جابجایی

جابجایی

h' = heat transfer coefficient $\left(SI: \frac{J}{s \times m^2 \times K}\right)$
ضریب انتقال حرارت سیال و دیواره

S = heat transfer area $(SI: m^2)$
سطح انتقال حرارت سیال و دیواره

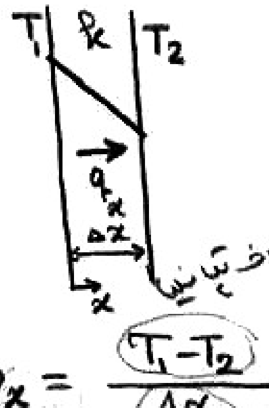
ضریب انتقال حرارت تابع سرعت حرکت سیال، شکل هندسی دیواره و خواص ترموفیزیکی سیال می‌باشد (ویسکوزیته، دانسیته، ضریب هدایت حرارتی، ظرفیت حرارتی). در مورد نحوه محاسبه h بعداً به تفصیل بحث خواهد شد.

- نحوه محاسبه انتقال حرارت در دیواره (جامدات): برای محاسبه انتقال حرارت در جامدات از قانون هدایت فوریه به صورت زیر استفاده می‌شود:

شار انتقال حرارت $\left(SI: \frac{J/s}{m^2}\right)$

$$q_x \propto -\frac{dT}{dx} \Rightarrow q_x = -k'\frac{dT}{dx}$$

ضریب هدایت حرارتی
Thermal conductivity $\left(SI: \frac{W}{m \cdot K}\right)$

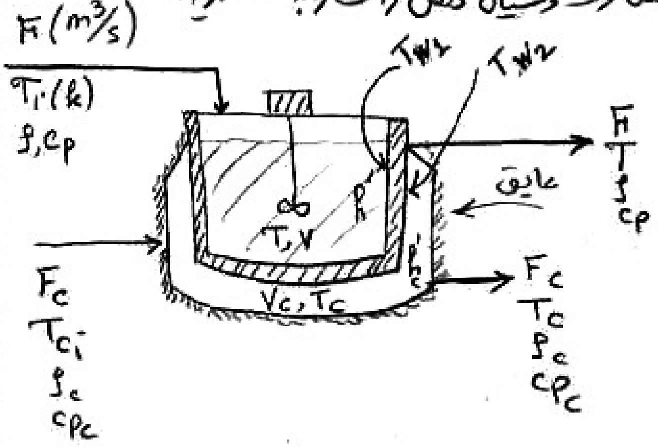


$$q_x\int_0^{\Delta x} dx = -k'\int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow q_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{k'}} \quad , \quad Q_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x}{k'S}}$$

جریان حرارت (W) — مقاومت هدایتی

سطح انتقال حرارت (سطح عمود بر جهت انتقال حرارت)

مثال ۵: مدلسازی (موازنه انرژی): ظرف همزن دار زیر را که از طریق ژاکت آن سرد و گرم می‌شود را در نظر بگیرید. معادلات مربوط به نحوه تغییرات دمای سیال داخل ظرف و سیال داخل ژاکت را بدست آورید.



فرضیات:

۱- خواص فیزیکی و ترمودینامیکی سیال داخل ظرف و ژاکت ثابت است ($C_{p_c}, \rho_c, C_p, \rho$).

۲- حجم مایع داخل ظرف و ژاکت ثابت است (V_c و V).

۳- اتلاف حرارتی با محیط نداریم (عایق).

۴- اختلاط کامل داخل ظرف و ژاکت وجود دارد (فرمولاسیون lumped).

۵- ضریب انتقال حرارت داخل ظرف (h') و داخل ژاکت (h'_c) ثابت اند.

- موازنه انرژی برای سیال داخل ظرف:

انرژی داخلی بر واحد جرم (J/kg) — آنتالپی بر واحد جرم (J/kg) — سطح دیواره داخلی تانک (m^2) — دمای سطح داخلی دیواره تانک

$$\frac{d(\rho V \hat{u})}{dt} = F\rho\hat{h}_i - F\rho\hat{h} - h'S(T - T_{w_1})$$

با استفاده از تعاریف C_p و C_v داریم ($C_p \simeq C_v$ برای مایعات):

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = F\rho C_p(T_i - T) - h'S(T - T_{w_1}) \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} \hat{h}_i = C_p(T_i - T_r) \\ \hat{h} = C_p(T - T_r) \end{cases}$$

I.C) $t=0, \; T = T_0$

- موازنه انرژی برای سیال داخل ژاکت:

سطح دیواره خارجی تانک — دمای سطح خارجی دیواره تانک

$$\frac{d(\rho_c V_c \hat{u}_c)}{dt} = F_c\rho_c\hat{h}_{c_i} - F_c\rho_c\hat{h}_c + h'_c S_c(T_{w_2} - T_c)$$

بنابراین داریم:

$$\rho_c V_c C_{p_c}\frac{dT_c}{dt} = F_c\rho_c C_{p_c}(T_{c_i} - T_c) + h'_c S_c(T_{w_2} - T_c) \quad \mathrm{II}$$

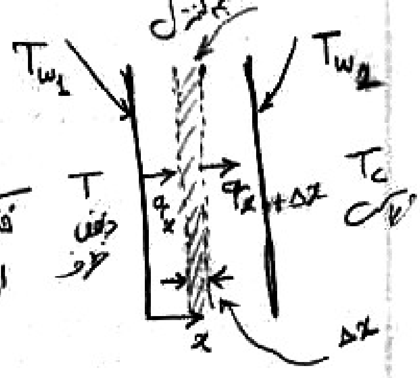
I.C) $t=0, \; T_c = T_{c_0}$

$$\begin{cases} \hat{h}_{c_i} = C_{p_c}(T_{c_i} - T_r) \\ \hat{h}_c = C_{p_c}(T_c - T_r) \end{cases}$$

- موازنه انرژی برای دیواره نازک (جهت تعیین معادلات مربوط به T_{w1} و T_{w2}) :

★ **حالت اول :** با در نظر گرفتن پروفایل دما در دیواره ولی صرف نظر از انحنای جسم ($S \simeq S_c$)

ضخامت دیواره << قطر تانک $\Rightarrow S \simeq S_c$



q_x = فلاکس حرارت ورودی به حجم کنترل از طریق هدایت ، $q_{x+\Delta x}$ = فلاکس حرارت خروجی از حجم کنترل از طریق هدایت

$\hat{u}_w$ = انرژی داخلی دیواره بر واحد جرم ، k'_w = ضریب هدایت حرارتی دیواره ، l = ضخامت دیواره

ρ_w = دانسیته دیواره

$$\frac{\partial(\hat{u}_w \rho_w S \Delta x)}{\partial t} = q_x S - q_{x+\Delta x} S \quad , \quad d\hat{u}_w = c_{p_w} dT_w$$

با تقسیم دو طرف معادله فوق بر حجم کنترل و میل دادن آن به سمت صفر داریم :

$$\frac{\rho_w c_{p_w} \partial(T_w)}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{q_x - q_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-\partial q_x}{\partial x}$$

با استفاده از قانون هدایت فوریه ($q_x = -k'_w \frac{\partial T_w}{\partial x}$) داریم :

$$\rho_w c_{p_w} \frac{\partial T_w}{\partial t} = k'_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \quad \text{III} \quad , \quad \begin{cases} I.C. \; t=0, \; T_w = f(x) \\ B.C1) \; x=0, \; T_w = T_{w1} \\ B.C2) \; x=l, \; T_w = T_{w2} \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می‌گردد مدلسازی فوق کامل است ولی با توجه به مجهول بودن

T_{w_1} و T_{w_2} قابل حل نمی‌باشد. برای حل مشکل فوق برروی دو مرز درونی و خارجی دیواره موازنه انرژی نوشته تا تعداد مجهولات با معادلات برابر شود. بعبارت دیگر شرایط مرزی معادله III را بصورت زیر تغییر می‌دهیم (موازنه انرژی در مرز را وقتی در حالت پایا نوشتیم):

مرز داخل دیواره: انرژی ورودی به دیواره از طریق جابجایی = انرژی خروجی از دیواره از طریق هدایت

$$B.C1)\quad h' S (T - T_w)\Big|_{x=0} = -k_w S \frac{\partial T_w}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

و بطور مشابه برای مرز خارج دیواره:

$$B.C2)\quad -k_w S \frac{\partial T_w}{\partial x}\Big|_{x=l} = h'_c S (T_w - T_c)\Big|_{x=l}$$

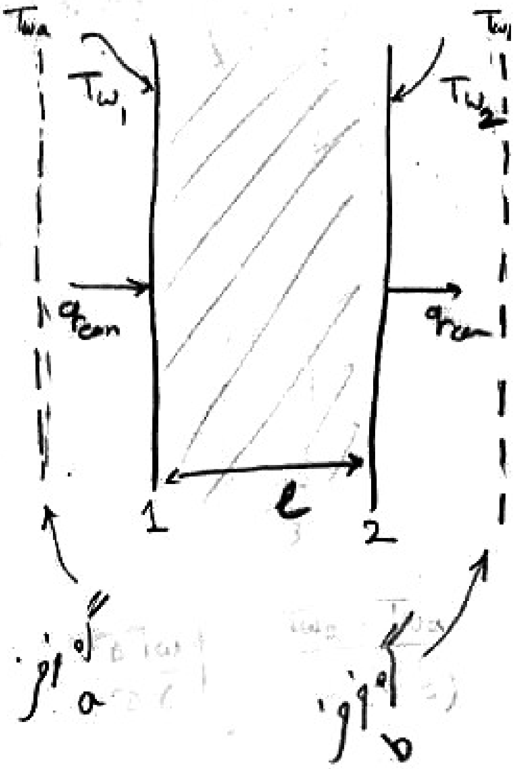
- بنابراین مدل فرآیند شامل دو معادله ODE و یک معادله PDE همراه با شرایط اولیه و مرزی می‌باشد.

- روش حل عددی مدل: روشهای مختلفی برای حل معادلات PDE وجود دارد، ولی یکی از مرسوم‌ترین آنها به روش روی خط (method of lines) معروف است. در این روش ابتدا مشتقات مکانی $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ را از طریق روشهای مختلف تفاضل محدود (finite difference) یا المان محدود (finite element) گسسته سازی نموده و سپس دستگاه معادلات ODE حاصل را از روشهای Runge-kutta حل می‌نمائیم. بعنوان مثال ابتدا دیواره را یک ناحیه با ضخامت l در نظر گرفته و سپس برای گره‌های حاصل، مشتقات مکانی را بصورت زیر گسسته می‌نمائیم:

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{k'_w}{\rho_w C_{p_w}} \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} = \alpha_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$$

m^2/s

ضریب نفوذ حرارت
(thermal Diffusivity)



تفاضل مرکزی
(Central Difference):

$$\left\{\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}\right|_1 &= \frac{T_{w2} - 2T_{w1} + T_{wa}}{l^2} \\ \left.\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}\right|_2 &= \frac{T_{wb} - 2T_{w2} + T_{w1}}{l^2} \\ \left.\frac{\partial T_w}{\partial x}\right|_1 &= \frac{T_{w2} - T_{wa}}{2l} \\ \left.\frac{\partial T_w}{\partial x}\right|_2 &= \frac{T_{wb} - T_{w1}}{2l} \end{aligned}\right.$$

با جاگذاری مشتقات تقریب فوق در معادلات و شرایط مرزی داریم:

1 م: $\dfrac{dT_{w1}}{dt} = \alpha_w \left[\dfrac{T_{w2} - 2T_{w1} + T_{wa}}{l^2}\right]$, I.c) $t=0,\ T_{w1} = T_{w10}$

2 م: $\dfrac{dT_{w2}}{dt} = \alpha_w \left[\dfrac{T_{wb} - 2T_{w2} + T_{w1}}{l^2}\right]$, I.c) $t=0,\ T_{w2} = T_{w20}$

همانطور که مشاهده می‌کنید در معادلات فوق T_{wa} و T_{wb} مجهول‌اند که می‌توان از طریق شرایط مرزی حساب نمود:

شرط مرزی اول: $h'(T - T_{w1}) = -k'_w \left(\dfrac{T_{w2} - T_{wa}}{2l}\right) \Rightarrow T_{wa} = T_{w2} + \dfrac{2lh'}{k'_w}(T - T_{w1})$ ✓

شرط مرزی دوم: $-k'_w \left(\dfrac{T_{wb} - T_{w1}}{2l}\right) = h'_c (T_{w2} - T_c) \Rightarrow T_{wb} = T_{w1} + \dfrac{2lh'_c}{k'_w}(T_c - T_{w2})$ ✓

بنابراین نهایتاً معادلات مدل بصورت زیر حاصل میشوند:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{F}{V}(T_i - T) - \dfrac{h'S}{\rho V C_p}(T - T_{w1}) & , \text{I.C1)}\ T_0 \\[2ex] \dfrac{dT_c}{dt} = \dfrac{F_c}{V_c}(T_{ci} - T_c) + \dfrac{h'_c S}{\rho_c V_c C_{p_c}}(T_{w2} - T_c) & , \text{I.C2)}\ T_{c0} \\[2ex] \dfrac{dT_{w1}}{dt} = \dfrac{\alpha_w}{\ell^2}\left[2(T_{w2} - T_{w1}) + \dfrac{2\ell h'}{k_w}(T - T_{w1})\right] & \text{I.C3)}\ T_{w10} \\[2ex] \dfrac{dT_{w2}}{dt} = \dfrac{\alpha_w}{\ell^2}\left[2(T_{w1} - T_{w2}) + \dfrac{2\ell h'_c}{k_w}(T_c - T_{w2})\right] & \text{I.C4)}\ T_{w20} \end{cases}$$

در این حالت سیستم دارای چهار متغیر حالت میباشد:

$$X^T = [T, T_c, T_{w1}, T_{w2}]$$

* <u>حالت دوم</u>: فرض شبه یکنواخت برای دیواره و یا بعبارت دیگر صرفنظر از تجمع حرارت در دیواره و صرفنظر از انحنای جسم:

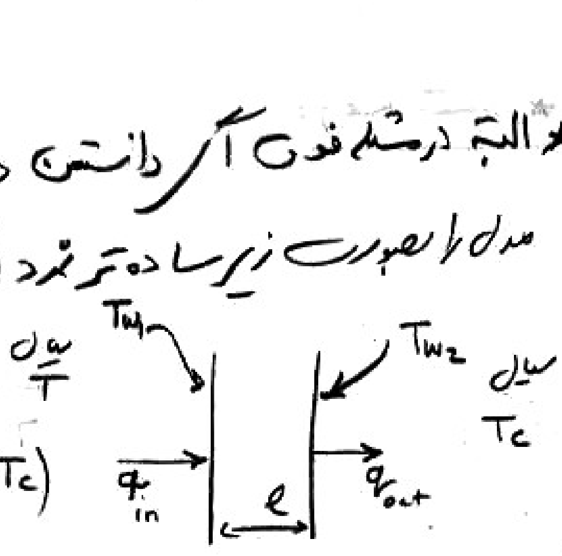
$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{F}{V}(T_i - T) - \dfrac{h'S}{\rho V C_p}(T - T_{w1}) \\[2ex] \dfrac{dT_c}{dt} = \dfrac{F_c}{V_c}(T_{ci} - T_c) + \dfrac{h'_c S}{\rho_c V_c C_{p_c}}(T_{w2} - T_c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T_{w2} - T_{w1}) = \dfrac{\ell h'}{k_w}(T_{w1} - T) \\[2ex] (T_{w2} - T_{w1}) = \dfrac{\ell h'_c}{k_w}(T_c - T_{w2}) \end{cases}$$

"Quasi steady state Approximation"

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\ell h'}{k_w}\right) T_{w1} - T_{w2} = T \\[2ex] -T_{w1} + \left(1 + \dfrac{\ell h'_c}{k_w}\right) T_{w2} = T_c \end{cases} \Rightarrow T_{w1} \checkmark ,\ T_{w2} \checkmark$$

* البته در مسئله فوق اگر دانستن دمای دیواره برای ما اهمیت نداشته باشد، میتوان مدل را بصورت زیر ساده تر کرد (کمک مفهوم مقاومت معادل):



فرض QSS: $q_{in} = q_{out}$

$$h'(T - T_{w1}) = k_w\left(\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ell}\right) = h'_c(T_{w2} - T_c)$$

$$\frac{T-T_{w1}}{1/h'S}=\frac{T_{w1}-T_{w2}}{\frac{\ell}{k_w'S}}=\frac{T_{w2}-T_c}{1/h_c'S}=\frac{T-T_c}{1/US}$$

$$\underset{\uparrow\,1/h'S}{T \;\; T_{w1}} \;\; \underset{\uparrow\,\frac{\ell}{k_w'S}}{\;} \;\; \underset{\uparrow\,\frac{1}{h_c'S}}{T_{w2} \;\; T_c}$$

$$\frac{1}{US}=\frac{1}{h'S}+\frac{\ell}{k_w'S}+\frac{1}{h_c'S} \quad , \quad U=\frac{1}{1/h'+\frac{\ell}{k_w}+1/h_c'}$$

ضریب کلی انتقال حرارت

overal heat transfer coefficient

بنابراین با استفاده از روش فوق معادلات مدل بصورت زیر ساده شده:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{F}{V}(T_i-T)-\frac{US}{\rho V c_p}(T-T_c)$$

$$\frac{dT_c}{dt}=\frac{F_c}{V_c}(T_{ci}-T_c)+\frac{US}{\rho_c V_c c_{p_c}}(T-T_c)$$

معادلات مدل با فرض QSS برای دیواره و صرف‌نظر از انباشت دیواره

در این حالت سیستم دارای دو متغیر حالت می‌باشد.

$$x^T=[T, T_c]$$

* * *

توجه ۱: در اکثر مواقع مقاومت هدایتی دیواره خیلی کمتر از مقاومت جابجایی می‌باشد زیرا ℓ کوچک و برای فلزات k_w بزرگ است. بنابراین در محاسبه ضریب کلی انتقال حرارت می‌توان از مقاومت دیواره صرف‌نظر نمود.

برای دیواره‌های فلزی تانک‌ها ، $$U \simeq \frac{1}{1/h'+1/h_c'}=\frac{h'h_c'}{h'+h_c'}$$

توجه ۲: در مواقعی که ضریب هدایتی دیواره زیاد باشد ولی نمی‌توان از تجمع حرارت در دیواره صرف‌نظر نمود می‌توان از مدل‌سازی lumped برای محاسبه تغییرات دمای دیواره با زمان استفاده نمود.

* حالت سوم: می توان از پروفایل دما در دیواره صرف نظر نمود ولی نمی توان از تجمع حرارت در دیواره صرف نظر نمود. در این حالت می توان از فرمولاسیون lumped برای تعیین دمای دیواره استفاده نمود.

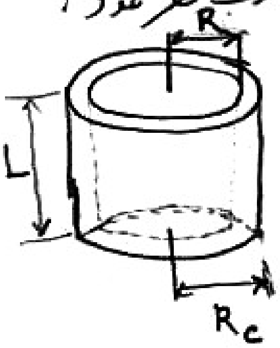
$T_{w1} \approx T_{w2} = T_w$

$$\cancel{S}\, l\, \rho_w C_{p_w} \frac{dT_w}{dt} = h' \cancel{S}(T - T_w) - h_c' \cancel{S}(T_w - T_c)$$

بنابراین در این حالت سیستم دارای ۳ متغیر حالت می باشد

$$X^T = [T,\ T_c,\ T_w]$$

* حالت چهارم: تجمع حرارت در دیواره ناچیز است ولی نمی توان از پروفایل دما و انحنای جسم صرف نظر نمود.



$$h' S (T - T_{w1}) = Q_{cond} = h_c' S_c (T_{w2} - T_c)$$

نرخ انتقال حرارت از سطح پایینی اگر سطح را تقریباً مسطح بگیریم معادله قبل می باشد:

$$Q_{cond1} \approx k_w' \frac{T_{w1} - T_{w2}}{l} (\pi R^2), \quad l = R_c - R$$

نرخ انتقال حرارت از سطح جانبی اگر سطح جانبی را معادله استوانه بگیریم داریم:

$$\text{ثابت} = Q_{cond2} = -k_w' \frac{dT_w}{dr}\Big|_{r=R} (2\pi R L) = -k_w' \frac{dT_w}{dr}\Big|_{r=R_c} (2\pi R_c L) = -k_w' \frac{dT_w}{dr} (2\pi r L)$$

$$\Rightarrow \frac{Q_{c2}}{2\pi k_w' L} \int_R^{R_c} \frac{dr}{r} = -\int_{T_{w1}}^{T_{w2}} dT_w \Rightarrow T_{w1} - T_{w2} = \frac{Q_{c2}}{2\pi k_w' L} \ln\left(\frac{R_c}{R}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{cond2} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ln(R_c/R) / 2\pi k_w' L}$$

مقاومت هدایت