- نحوه تعیین ضریب انتقال حرارت: همانطور که ذکر شد، ضریب انتقال حرارت به خصوصیات فیزیکی و ترمودینامیکی سیال و سرعت حرکت سیال و مشخصات هندسی سیستم بستگی دارد. برای محاسبه ضریب انتقال حرارت معمولاً از اعداد بدون بعد استفاده می‌گردد، در ادامه به بعضی از اعداد بدون بعد و مفهوم آنها پرداخته شده است.

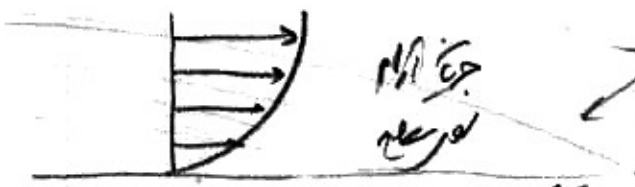
- عدد رینولدز (Reynolds): (سرعت m/s، طول مشخصه (m)، چگالی (kg/m^3)، گرانروی دینامیکی (ویسکوزیته) $(\frac{kg}{m.s})$)

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{vl}{\nu} = \frac{\text{Inertia forces}}{\text{Viscous forces}} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}}$$

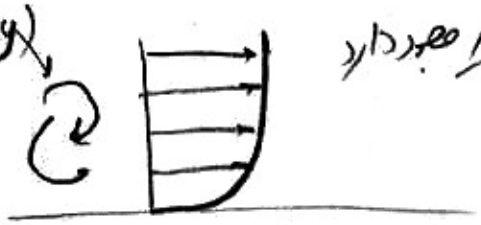
ν: kinematic viscosity (m^2/s), momentum diffusivity $\rightarrow (\frac{\mu}{\rho})$

- عدد رینولدز نشان دهنده نوع جریان سیال و یا شکل:
  1- جریان آرام (Laminar flow)
  2- جریان نا آرام (turbulent flow)
  3- جریان گذرا (transition flow)

- در جریان آرام حرکت لایه‌ای سیال وجود دارد، یعنی لایه‌های سیال با سرعتهای مختلف در حرکت و یا شند



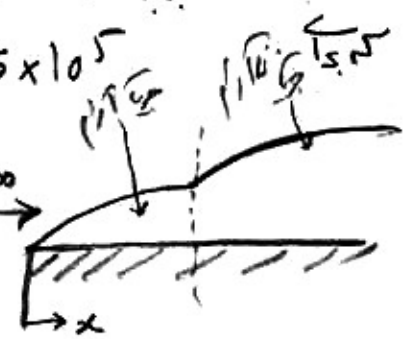
- ولی در جریان نا آرام حرکت توده‌های سیال از نقطه‌ای به نقطه دیگر وجود دارد (eddy)



بنابراین در جریان آرام مکانیزم انتقال حرارت از طریق نفوذ ملکولی (molecular diffusion) و یا شد، ولی در جریان نا آرام، مکانیزم انتقال حرارت از طریق حرکت eddy ها و یا شد (eddy diffusion)

مطالعات تجربی برای حرکت سیالات بروی سطوح تخت (Flat plate) نشان داده‌اند که جریان لایه‌ای تا $Re_x > 5\times10^5$ برقرار است و سپس جریان آشفته جایگزین می‌شود.

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \quad x = \text{فاصله از لبه جلو}$$



برای جریان سیال داخل خطوط لوله حالات متفاوتی مشاهده می‌گردد.

$$\therefore Re_d = \frac{Vd}{\nu} \leftarrow \text{قطر لوله}, \quad \text{سرعت سیال} \rightarrow$$

$Re_d > 2200$ جریان آشفته

$2000 < Re_d < 2200$ جریان گذرا

Fully developed flow
(جریان توسعه یافته)

- توجه: در جریان توسعه یافته داخل خطوط لوله، در سیال فقط تابع سطح مقطع بوده و در طول لوله تغییر نمی‌کند ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ، $\frac{\partial u}{\partial r} = f(r)$).

- توجه: معمولاً در لوله‌ها با طول نسبتاً زیاد و دبی جریان سیال را توسعه یافته در نظر گرفت (صرف نظر از لزات ابتدایی و انتهایی).

- توجه: با استفاده از تعریف دبی جرمی و حجمی عدد رینولدز را بصورت زیر نیز نمایش داد:

$\dot{m} = \text{mass flow} \left(\frac{kg}{s}\right) = \rho V A$ ← سطح مقطع لوله ⇒ $Re_d = \frac{\rho V d}{\mu}$

$G = \frac{\text{فلکس جرمی}}{\text{(mass flux)}} = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V \Rightarrow Re_d = \frac{Gd}{\mu}$

- عدد پرندل (Prandtl number): این عدد بدون بعد نشان دهنده نسبت نفوذ مومنتم به نفوذ حرارت و باشد و بصورت زیر تعریف میشود:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \nu \leftarrow \text{momentum diffusivity } (m^2/s)$$

$$\therefore Pr = \frac{\mu/\rho}{k/\rho \hat{C}_p} = \frac{\mu \hat{C}_p}{k}$$

μ: ویسکوزیته دینامیکی $\left(\frac{kg}{m.s}\right)$

$\hat{C}_p$: ظرفیت حرارتی $\left(\frac{J}{K.kg}\right)$

k: ضریب هدایت حرارتی $\left(\frac{W}{K.m}\right)$

α ← thermal Diffusivity (m^2/s)

درصورتی که $Pr = 1$ باشد لایه مرزی انتقال مومنتم و حرارت برهم منطبق میباشد.

و اگر $Pr > 1$ لایه مرزی انتقال مومنتم از لایه مرزی انتقال حرارت ضخیم‌تر میباشد (البته این عدد در حقیقت حدود 0.7 میباشد).

توجه: برای گازهای ایده‌آل مانند هوا ارقام بالا صحیح میباشد: $Pr \simeq 0.7$

- برای مایعاتی مانند آب ارقام صحیح‌تری داریم: $Pr \simeq 7.0$

- بنابراین برای گازهای ایده‌آل تقریباً لایه مرزی انتقال حرارت و مومنتم برهم منطبق میباشند و برای مایعات بطور کلی لایه مرزی انتقال مومنتم ضخیم‌تر از لایه مرزی انتقال حرارت میباشد.

- عدد ناسلت (Nusselt number): این عدد بدون بعد نشان دهنده نسبت انتقال حرارت جابجایی و هدایتی در سیال بوده و بصورت زیر تعریف میشود:

$$Nu = \frac{h' l}{k'}$$

h': ضریب انتقال حرارت جابجایی

l: طول مشخصه

k': ضریب هدایت سیال

روابط تجربی درجه اول و محدود تجربی درجه دوم بولنت نشان داده اند که معمولاً عدد ناسلت تابعی از Re و Pr میباشد. بعنوان مثال روابط زیر (با اعمال فرضیات ساده‌کننده):

For fully developed turbulent flow in smooth pipes : $Nu_d = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$

(Dittus & Boelter)

$$n = \begin{cases} 0.4 & \text{for heating of fluid} \\ 0.3 & \text{for cooling of fluid} \end{cases}$$

در حالت کلی معادل زیر را دوتال مورد استفاده قرار دارد: $Nu_d = C Re^m Pr^n$

C, m, n با توجه به داده‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شوند.

- برای جریان آرام درون خطوط لوله از رابطه تئوری زیر دوتال استفاده نمود:

$Nu_d = 4.364$: fully developed Laminar flow in pipes

- در مواقعی که سطح مقطع جریان دایروی نمی‌باشد دوتال از رابطه فوق استفاده نمود و به جای قطر از قطر هیدرولیکی زیر استفاده نمود:

$$d_H = \frac{4A}{P}$$

A ← سطح مقطع جریان

P ← محیط تماس

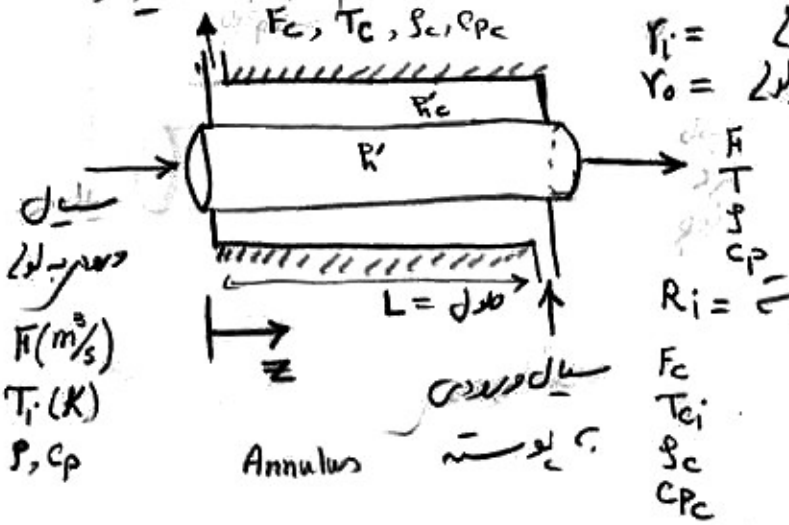
برای روابط دیگر ارائه شده دوتال به کتابهای مرجع و یا درس مراجعه نمود. بعنوان مثال فصل ششم کتاب زیر:

Holman "Heat transfer", McGraw-Hill

* * *

- در مثال ۵ نحوه نوشتن موازنه انرژی برای یک ظرف کاملاً همزده (همزن دار) توضیح داده شد. حال اگر فرض اختلاط کامل (مدل سازی lumped) برقرار نباشد نیز توان موازنه انرژی را برای یک المان دیفرانسیلی مورد استفاده قرار داد. برای درک بهتر این موضوع، مثالی از نحوه مدل سازی یک مبدل دولوله ای را در ادامه توضیح داده شده است.

● مثال ۶ مدل سازی (موازنه انرژی) برای یک مبدل حرارتی دولوله ای بدون تغییر فاز : مبدل حرارتی شکل داده شده در شکل زیر را که در آن انتقال حرارت مابین سیال سرد و گرم صورت می گیرد را در نظر بگیرید، با نوشتن موازنه انرژی معادله دیفرانسیل حاکم بر فرآیند را به دست آورید.



- فرضیات :

۱- جریان قالبی (plug flow) داخل لوله و پوسته وجود دارد. بعبارت دیگر هیچگونه تغییراتی در سطح مقطع لوله و یا پوسته وجود ندارد (فرض لامپ lumped در جهت شعاعی و دیفرانسیلی در جهت محوری).

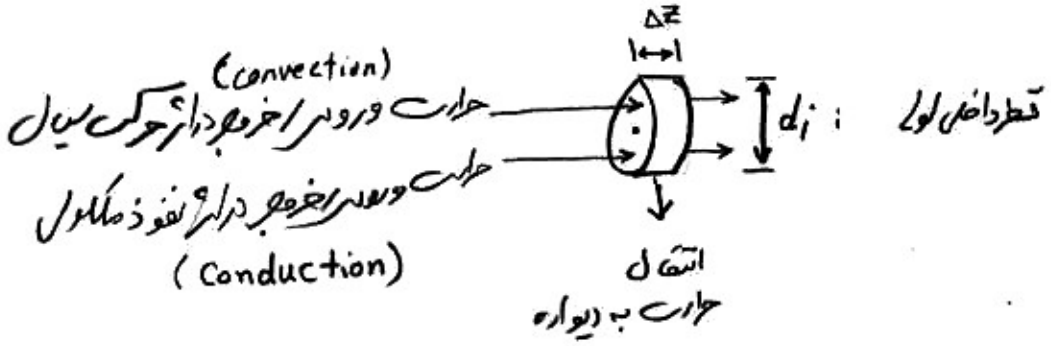
۲- دیواره پوسته کاملاً عایق بندی شده است (اتلاف حرارت با محیط وجود ندارد).

۳- از تجمع حرارت در دیواره لوله و تعادل صرف نظر شود (فرض QSSA) دلیل مقاومت هدایتی لوله باید در نظر گرفته شود (از انحنای لوله نیز تعادل صرف نظر شود).

۴- ظرفیت حرارتی و دانسیته سیال داخل لوله و پوسته در تعادل ثابت در نظر گرفته شد.

۵- ضریب انتقال حرارت داخل لوله (h') و داخل پوسته (h'_c) ثابت اند.

با توجه به اینکه از تغییرات شعاعی دما صرف نظر شده است، المان انتخاب شده از لوله بصورت زیر است:



موازنه انرژی بر سیال داخل لوله:

جرم سیال داخل المان

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\frac{\pi d_i^2}{4}\Delta z}_{\text{حجم المان}}\ \rho\ \hat{C}_p\ T\right] = F\rho\hat{C}_p\left(T|_z - T|_{z+\Delta z}\right) + \left(q_z - q_{z+\Delta z}\right)\underbrace{\left(\frac{\pi d_i^2}{4}\right)}_{\text{سطح مقطع انتقال حرارت در جهت محور}} - \underbrace{h'(\pi d_i \Delta z)}_{\text{سطح انتقال حرارت سیال و دیواره لوله}}\left(T - T_{w_i}\right)$$

T_{w_i}: دمای دیواره داخل لوله

حال دو طرف معادله فوق را بر المان حجم تقسیم کرده و آن را نسبت صفر مثل می‌دهیم، لذا داریم:

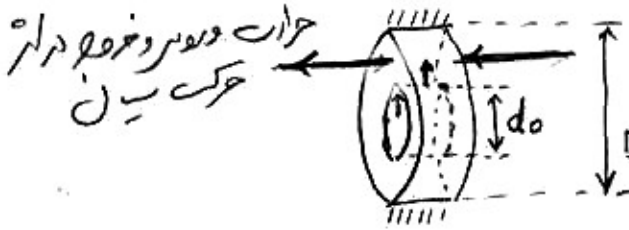
$$\rho\hat{C}_p\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{-F\rho\hat{C}_p}{\pi d_i^2/4}\right)\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{4h'}{d_i}\left(T - T_{w_i}\right)$$

- حال با توجه به اینکه انتقال حرارت در اثر حرکت سیال خیلی بیشتر از انتقال حرارت در اثر حرکت مولکولی (هدایت) می‌باشد و میتوان از ترم دوم طرف راست معادله فوق صرف نظر نمود. لذا داریم:

سرعت سیال داخل لوله $\leftarrow u = \frac{uA}{A} = \frac{F}{A}$ ← برای جرم سطح مقطع

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{4h'}{\rho\hat{C}_p d_i}\left(T - T_{w_i}\right) \quad (I)$$

- بطور مشابه برای سیال داخل پوسته نیز می‌توان المان زیر را در نظر گرفت:
(از انتقال حرارت هدایتی در جهت محور صرف نظر شده است)



$$\text{حجم المان} = \frac{\pi(D_i^2 - d_o^2)}{4}\Delta z$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\pi(D_i^2-d_o^2)}{4}\Delta z\,\rho_c\,\hat{C}_{P_c}\,T_c\right] = F_c\rho_c\hat{C}_{P_c}\left(T_c|_{z+\Delta z} - T_c|_z\right) + h'_c(\pi d_o \Delta z)(T_{w_o} - T_c)$$

دمای سطح خارجی لوله

پس از تقسیم دو طرف معادله فوق بر المان حجم و میل دادن آن به سمت صفر داریم:

$$\frac{F_c}{A_c} = \frac{u_c A_c}{A_c} = u_c \leftarrow \text{سرعت سیال داخل پوسته}$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = u_c\frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{4h'_c d_o}{(D_i^2 - d_o^2)\rho_c\hat{C}_{P_c}}(T_{w_o} - T_c) \quad (II)$$

توجه 1: u و u_c مقدار قدرمطلق سرعت سیال داخل لوله و پوسته می‌باشند.

توجه 2: با توجه به صرف نظر از تجمع حرارتی در دیواره لوله، و تقارن از مزیت کم انتقال حرارت در معادلات (I) و (II) بصورت زیر استفاده شد. در غیر اینصورت باید مانند مثال 5، موازنه انرژی برای دیواره لوله نیز نوشته شود.

$$Q_{ss}: \quad q_i(\pi d_i \Delta z) = q_o(\pi d_o \Delta z) = q_r|_r\,(2\pi r \Delta z)$$

$$\Rightarrow h'd_i(T - T_{w_i}) = h'_c d_o(T_{w_o} - T_c) = -k'_w(2r)\frac{dT_w}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_{w_i}}{\left(\frac{1}{h'd_i}\right)} = \frac{T_{w_o} - T_c}{\left(\frac{1}{h'_c d_o}\right)} = \frac{T_{w_i} - T_{w_o}}{\frac{\ln(d_o/d_i)}{2k'_w}} = \frac{T - T_c}{\frac{1}{U_o d_o}} = \frac{T - T_c}{\frac{1}{U_i d_i}}$$

U_i = ضریب کلی انتقال حرارت برمبنای سطح داخلی لوله $= \dfrac{1}{\frac{1}{h'} + \frac{d_i}{d_o h'_c} + \frac{d_i \ln(d_o/d_i)}{2k'_w}}$

U_o = ضریب کلی انتقال حرارت برمبنای سطح خارجی لوله $= \dfrac{1}{\frac{d_o}{d_i h'} + \frac{1}{h'_c} + \frac{d_o \ln(d_o/d_i)}{2k'_w}}$

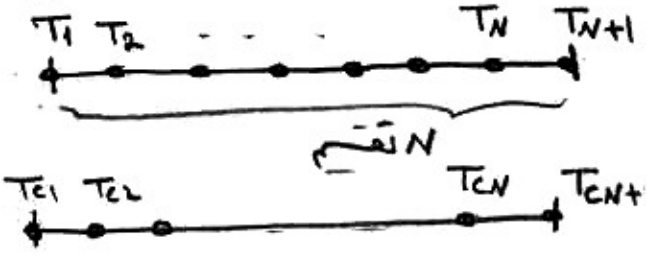
$U_o = U_i \frac{d_i}{d_o}$

با جایگزینی روابط فوق در معادلات (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{4U_i}{d_i \rho \hat{C}_p}(T - T_c) & \text{B.C) } z=0,\ T=T_i \\ & \text{I.C) } t=0,\ T=\phi(z) \\ \frac{\partial T_c}{\partial t} = u_c\frac{\partial T_c}{\partial z} + \frac{4U_i d_i}{(D_i^2 - d_o^2)\rho_c \hat{C}_{pc}}(T - T_c) & \text{B.C) } z=L,\ T_c = T_{ci} \\ & \text{I.C) } t=0,\ T_c = g(z) \end{cases}$$

- نحوه حل عددی یکی روش تفاضل محدود و برای حل عددی: method of line

- در معادله اول از روش تفاضل عقب رو و در معادله دوم از روش تفاضل پیشرو استفاده می‌گردد



B.C) $T_1 = T_i$, $T_{cN+1} = T_{ci}$

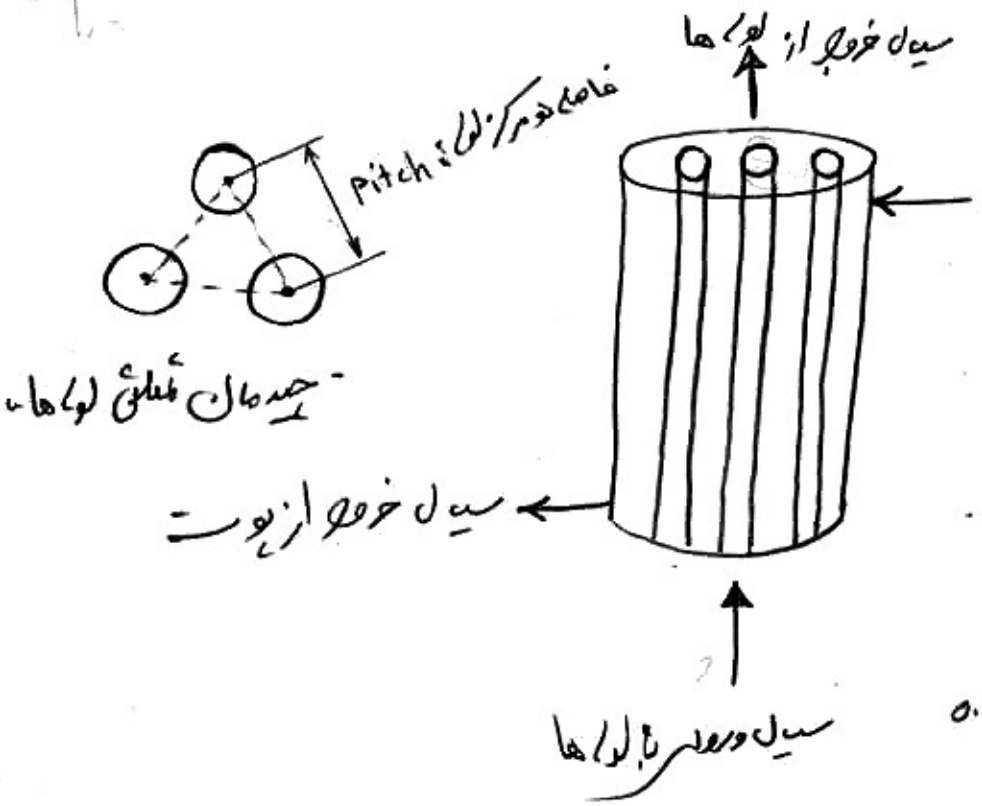
تفاضل عقب رو: $\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_j = \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta z}$

تفاضل پیشرو: $\left.\frac{\partial T_c}{\partial z}\right|_j = \frac{T_{cj+1} - T_{cj}}{\Delta z}$

- بنابراین داریم (دستگاه معادلات ode):

$$\begin{cases} \frac{dT_j}{dt} = -u\left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta z}\right) - \frac{4U_i}{d_i \rho C \hat{p}}(T_j - T_{cj}) & \text{for } j = 2, N+1 \\ \frac{dT_{cj-1}}{dt} = u_c\left(\frac{T_{cj} - T_{cj-1}}{\Delta z}\right) + \frac{4U_i d_i}{(D_i^2 - d_o^2)\rho_c \hat{C}_{pc}}(T_{j-1} - T_{cj-1}) & \\ T_1 = T_i\ ,\ T_{cN+1} = T_{ci} & \end{cases}$$

مثال ۷ : یک مبدل حرارتی لوله/پوسته با مشخصات زیر موجود است (بدون تغییر فاز) :



مشخصات مبدل :

تعداد لوله‌ها = 288

قطر داخلی هر لوله = $0.0109\ m$

قطر خارجی هر لوله = $0.0127\ m$

فاصله مرکز تا مرکز دو لوله (pitch) = $0.0159\ m$

L (طول مبدل) $= 4.5\ m$

D_s (قطر داخلی پوسته) $= 0.31\ m$

جنس لوله‌ها = Carbon steel

ضریب هدایت حرارتی لوله‌ها = $3180\ \frac{J}{min.m.K}$

- خصوصیات جریان ورودی به لوله‌ها :

دبی جرمی = $120.1\ \frac{kg}{min}$

دانسیته = $\rho = 980.3\ kg/m^3$

دما = $T_i = 30\ ^\circ C$

ظرفیت حرارتی = $\hat{C}_p = 4178\ \frac{J}{kg.K}$

ویسکوزیته = $\mu = 0.04195\ \frac{kg}{min.m}$

ضریب هدایت حرارتی = $k' = 37.45\ \frac{J}{min.m.K}$

- خصوصیات جریان ورودی به پوسته :

دبی جرمی = $74.08\ \frac{kg}{min}$

دانسیته = $\rho_c = 845.7\ kg/m^3$

دما = $T_{ci} = 80^\circ C$

ظرفیت حرارتی = $\hat{C}_{pc} = 4016\ \frac{J}{kg.K}$

ویسکوزیته دینامیکی = $\mu_c = 0.0253\ \frac{kg}{min.m}$

ضریب هدایت حرارتی = $k'_c = 16.33\ \frac{J}{min.m.K}$

- توجه : کلیه خواص از دمای متوسط لوله و پوسته محاسبه شده‌اند.

- محاسبه ضریب انتقال حرارت داخل لوله‌ها (h'):

N = تعداد لوله‌ها

$$Re_d \text{ (عدد رینولدز)} = \frac{\rho u d_i}{\mu} \quad , \quad u = \frac{\dot{m}/N}{\rho A} = \frac{\dot{m}/N}{\rho\left(\frac{\pi d_i^2}{4}\right)} = 4.56 \ m/min$$

$$\Rightarrow Re_d = \frac{4\dot{m}/N}{\pi d_i \mu} = \frac{4 \times 120.1/288}{\pi \times 0.0109 \times 0.04195} = 1161 < 2100$$

جریان آرام Laminar flow

$$\Rightarrow Nu_d = 4.364 = \frac{h' d_i}{k'} \Rightarrow h' = \frac{4.364 \times 37.45}{0.0109} = 15{,}000 \ \frac{J}{min.m^2.K}$$

- محاسبه ضریب انتقال حرارت داخل پوسته (h'_c):

سطح مقطع پوسته $= \frac{\pi}{4} D_s^2 - \frac{N\pi}{4} d_o^2 = \frac{\pi}{4}\left(D_s^2 - N d_o^2\right)$

$$u_c = \frac{\dot{m}_c}{\rho_c A_c} = \frac{74.08 \times 4}{845.7 \times \pi \times (0.31^2 - 288 \times 0.0127^2)} = 2.25 \ m/min$$

$$d_H = \frac{4A_c}{P} = \frac{\pi\left(D_s^2 - N d_o^2\right)}{\pi d_o \times N} = \frac{D_s^2 - N d_o^2}{N d_o} = 0.0136 \ m$$

$$Re = \frac{\rho u_c d_H}{\mu_c} = \frac{845.7 \times 2.25 \times 0.0136}{0.0253} = 1023 < 2100$$

جریان آرام

$$\Rightarrow Nu = 4.364 = \frac{h'_c d_H}{k'_c} \Rightarrow h'_c = \frac{4.364 \times 16.33}{0.0136} = 5{,}240 \ \frac{J}{min.m^2.K}$$

- محاسبه ضریب کلی انتقال حرارت:

$$U_i = \frac{1}{1/15{,}000 + \frac{0.0109}{0.0127 \times 5240} + \frac{0.0109 \ln\left(\frac{0.0127}{0.0109}\right)}{2 \times 3180}} = 4{,}334 \ \frac{J}{min.m^2.K}$$

* توجه کنید که معادلات ستی هال معادلات حاصل از تحلیل تجربی بوده و فقط برای محاسبه ضرایب جریان در پوسته صحیح می‌باشد.