پاسخ تمرینات کنترل خطی سری اول

۱)با توجه به اینکه این سیستم خطی و دارای خاصیت جمع آثار است، داریم:

$$y_1(s)=T_{11}(s)u_1(s)+T_{12}(s)\, u_2(s)$$

$$y_2(s)=T_{21}(s)\, u_1(s)+T_{22}(s)\, u_2(s)$$

به نحوی که:

$$T_{11}(s)=\left.\frac{y_1(s)}{u_1(s)}\right/_{u_2(s)=0} \longrightarrow T_{11}(s)=\frac{\left[\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(1+\frac{1}{s(s+2)}\right)\right]+\left[\frac{-1}{s}\right]}{\Delta}$$

$$T_{12}(s)=\left.\frac{y_1(s)}{u_2(s)}\right/_{u_1(s)=0} \longrightarrow T_{12}(s)=\frac{\frac{-1}{s}}{\Delta}$$

$$T_{21}(s)=\left.\frac{y_2(s)}{u_1(s)}\right/_{u_2(s)=0} \longrightarrow T_{21}(s)=\frac{-1}{\Delta}$$

$$T_{22}(s)=\left.\frac{y_2(s)}{u_2(s)}\right/_{u_1(s)=0} \longrightarrow T_{22}(s)=\frac{\left[\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\left(1+\frac{1}{s+1}\right)\right]+\left[\frac{-1}{s}\right]}{\Delta}$$

بطوریکه Δ (که مستقل از محل ورودی و خروجی است) عبارتست از:

$$\Delta = 1+\underbrace{\frac{1}{s(s+2)}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}}_{\text{حلقه‌ها}}+\underbrace{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{حاصلضرب حلقه‌های مستقل}}$$

۲)الف) متغیرهای حالت را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1= y + a\, u$$

$$x_2= x_1' + b\, u = y' + a\, u' + b\, u \longrightarrow x_2'= x_1'' + b\, u' = y'' + a\, u'' + b\, u'$$

با جایگذاری y'' ، y' و y خواهیم داشت:

$$y'' + y' + y = u'' + 2u' + 5u$$

$$(x_2'- au'' - bu')+(x_2- au' - bu)+(x_1- au)= u'' + 2u' + 5u$$

حال با برابر قرار دادن دو سمت معادله مقادیر مجهول a و b محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}&\text{For } u'':\ -a=1\\ &\text{For } u'':\ -b-a=2\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&a=-1\\ &b=-1\end{aligned}$$

بنابراین متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$x_1 = y + a\,u \longrightarrow y = x_1 + u$ (معادله خروجی)

$x_2 = x_1' + b\,u \longrightarrow x_1' = x_2 + u$

$(x_2' - au'' - bu') + (x_2 - au' - bu) + (x_1 - au) = u'' + 2u' + 5u \longrightarrow x_2' = -x_1 - x_2 + 3u$

بنابراین معادلات حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} U$$

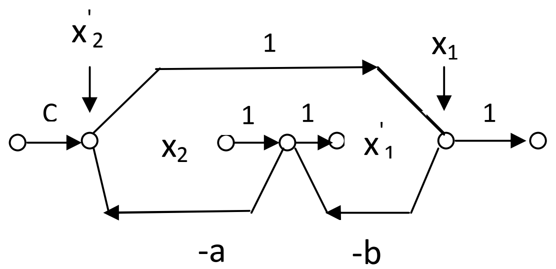
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X + 1U$$

ب) با توجه به رابطه‌ی $C\,(SI(s)-A)^{-1}\,B + D$ می‌توانیم تابع تبدیل را محاسبه کنیم:

$$TF(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(s(s+1))+1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 = \frac{S^2+2S+4}{S^2+S+1}$$

(چنانچه مستقیما نیز از معادله دیفرانسیل فوق، تبدیل لاپلاس با فرض آرامش اولیه بگیریم؛ همین نتیجه بدست خواهد آمد.)

۳)برای محاسبه‌ی معادله‌ی حالت دیاگرام حالت را به صورت زیر تبدیل کرده و تمامی S^{-1} را حذف می‌کنیم. این تغییر در گره وسطی(که در نمودار گردش سیگنال، تغییری ایجاد نکرده و صرفا دو شاخه با بهره‌ی یک اضافه شده) به این دلیل صورت گرفته که در حالت کلی $\dot{X}_1 \neq X_2$ است(اگر این تغییر داده نمی‌شد، به صورت پیش فرض X_1 با X_2 برابر در نظر گرفته می‌شد). حال با فرض X_1 و X_2 به عنوان گره‌های ورودی فرضی و $\dot{X}_1$ و $\dot{X}_2$ به عنوان گره‌های خروجی فرضی، با توجه به قاعده‌ی میسون داریم:



$\Delta = 1 - ab$

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{1-ab}\right)\begin{pmatrix} -b & 1 \\ ab & -a \end{pmatrix} x + \left(\frac{1}{1-ab}\right)\begin{pmatrix} -bc \\ c \end{pmatrix} u \qquad y = \left(\frac{1}{1-ab}\right)\begin{pmatrix} 1 & -a \end{pmatrix} x + \left(\frac{c}{1-ab}\right) u$$

در این صورت با استفاده از رابطه‌ی $C\,(SI(s)-A)^{-1}\,B + D$ تابع تبدیل برابر خواهد بود با:

$$TF(s)=\frac{c(S^2+1)}{S^2(1-ab)+s(a+b)}$$

با استفاده از گین میسون نیز این نتیجه بدست خواهد آمد. (چنانچه $\dot{X}_1 \neq X_2$ فرض نمی‌شد دو نتیجه مشابه نمی‌بودند.)

۴)

$$TF(s)=\frac{S+1}{S^3+5s^2+8s+6}$$

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -8 & -5\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}x$$

$$TF(s)=\frac{s+1}{s+3}\times\frac{1}{s+1+j}\times\frac{1}{s+1-j}$$

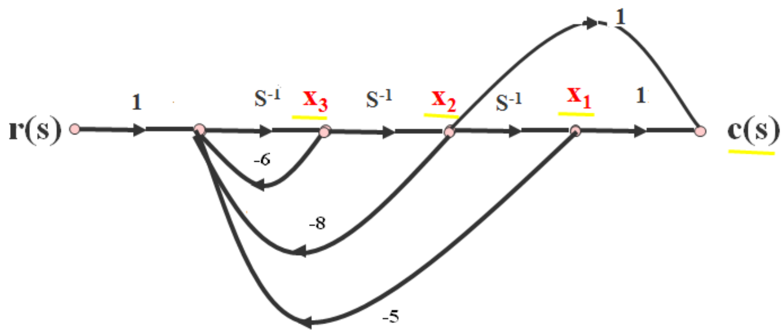
$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-1+j & 1 & 0\\ 0 & -1-j & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}x$$

در این روش بسته به نحوه‌ی انتخاب زوج‌های صورت و مخرج، پیاده‌سازی یکتا نیست. اگرچه در این روش حتما ماتریس A پایین مثلثی یا بالا مثلثی خواهد بود.

$$TF(s)=\frac{-0.4}{s+3}+\frac{\frac{2+j}{10}}{s+1+j}+\frac{\frac{2-j}{10}}{s+1-j}$$

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1-j & 0\\ 0 & 0 & -1+j\end{pmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{pmatrix}-0.4 & \frac{2+j}{10} & \frac{2-j}{10}\end{pmatrix}x$$

نکته‌ی مهم: در تمامی این روش‌ها محل تعریف متغیرهای حالت در معادلات تاثیر مستقیم داشته و لذا معادلات یکتا نخواهد بود. در تمامی پیاده‌سازی‌های فوق متغیرهای حالت x_1و x_2 و x_3 به ترتیب از راست به چپ تعریف شده است. مثلا برای پیاده‌سازی مستقیم :



۵)با توجه به نمودار گردش سیگنال خواهیم داشت:

$$x_3 = s x_2 \longrightarrow \dot{x}_2 = x_3$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{s+1}\right)(r - x_2) \longrightarrow \dot{x}_1 + x_1 = r - x_2 \longrightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + r - x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{(S+1)^2}(x_1 - x_3) \longrightarrow \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3 \xrightarrow{\dot{x}_2 = x_3} \dot{x}_3 = -3x_3 + x_1 - x_2$$

$$y = x_2$$

۶)کافیست ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را با توجه به قاعده‌ی میسون پیدا کرده و سپس با توجه به رابطه‌ی کلی حساسیت، مساله را حل کنیم:

$$TF(s) = \frac{\frac{e^{-Ts}}{s(s+1)}}{1 + \frac{k}{s} + \frac{e^{-Ts}}{s(s+1)}} = \frac{e^{-Ts}}{s(s+1) + k(s+1) + e^{-Ts}} = \frac{e^{-Ts}}{a}$$

$$S_k^{TF} = \frac{k}{TF} \times \frac{\partial TF}{\partial k} = \frac{k\,\cancel{a}}{\cancel{e^{-Ts}}} \times \frac{(-s\,\cancel{e^{-Ts}} \times a) + (-s\,\cancel{e^{-Ts}} \times e^{-Ts})}{a \times \cancel{a}} = \frac{-ks(a + e^{-Ts})}{a}$$

۷)از آنجا که در سیستم‌های غیرخطی و در نقطه‌ی تعادل، تغییرات نداریم:

$$\dot{x}_1 = 0 \longrightarrow -x_1^2 + x_2 + 3u = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \longrightarrow -2x_1 x_2 = 0$$

از معادله‌ی دوم نتیجه گرفته می‌شود که یا x_{1Q} صفر است و یا x_{2Q}. اما چون $y_Q=0$ بنابراین $x_{1Q}=0$ انتخاب می‌شود. علاوه بر این از معادله‌ی اول داریم:

$$-x_1^2 + x_2 + 3u = 0 \xrightarrow{x_{1Q}=0,\,u_Q=2} x_{2Q} = -6$$

بنابراین برای خطی سازی داریم:

$$A = \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\right|_{X_Q ,\, u_Q} = \begin{pmatrix} -2x1 & 1 \\ -2x2 & -2x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial u}\right|_{X_Q ,\, u_Q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D=0$$