
LINEAR CONTROL SYSTEMS

Ali Karimpour
Associate Professor
Ferdowsi University of Mashhad

Lecture 14

Root Locus Technique

Topics to be covered include:

- ❖ Root locus criterion.
 - ◆ Root loci (RL).
 - ◆ Complement root loci (CRL).
 - ◆ Complete root loci.
- ❖ Property and construction of complete root loci.

Root locus

مکان ریشه ها

Root locus, shows the position of roots of the following equation for different values of k

مکان ریشه ها، موقعیت ریشه های معادله زیر را بر حسب مقادیر مختلف k نشان می دهد.

$$1 + kf(s) = 0$$

Root loci (RL)

$$k \in R^+$$

Complement root loci (CRL)

$$k \in R^-$$

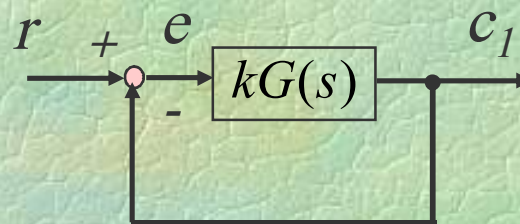
Complete root loci

$$k \in R$$

Root locus

مکان ریشه ها

Suppose:



Closed loop system is:

$$M(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)}$$

Characteristic equation is:

$$1 + kG(s) = 0$$

Root locus, shows the position of roots of above equation for different values of k

مکان ریشه ها، موقعیت ریشه های معادله فوق را بر حسب مقادیر مختلف k نشان می دهد.

The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Which points lie on the root loci?

چه نقاطی بر روی مکان ریشه قرار دارند؟

$$f(s) \in R$$

Condition of angle

شرط زاویه

$$f(s) \in R^- \quad k \geq 0$$

$$f(s) \in R^+ \quad k \leq 0$$

Condition of magnitude

شرط اندازه

$$k = -\frac{1}{f(s)}$$

The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

Rule 1: Specify the equation **exactly** in the following form.

قانون اول: سیستم را **دقیقا** بصورت زیر بیان کنید.

$$1 + kf(s) = 0$$

~~$$s^3 + 3ks^2 + 6s + k = 0$$~~

$$1 + k \frac{3s^2 + 1}{s^3 + 6s} = 0$$

How many branches in root loci? چند شاخه در مکان ریشه ها؟

It is :

$$\text{No. of branches} = \max(m, n)$$

The Root Locus procedure

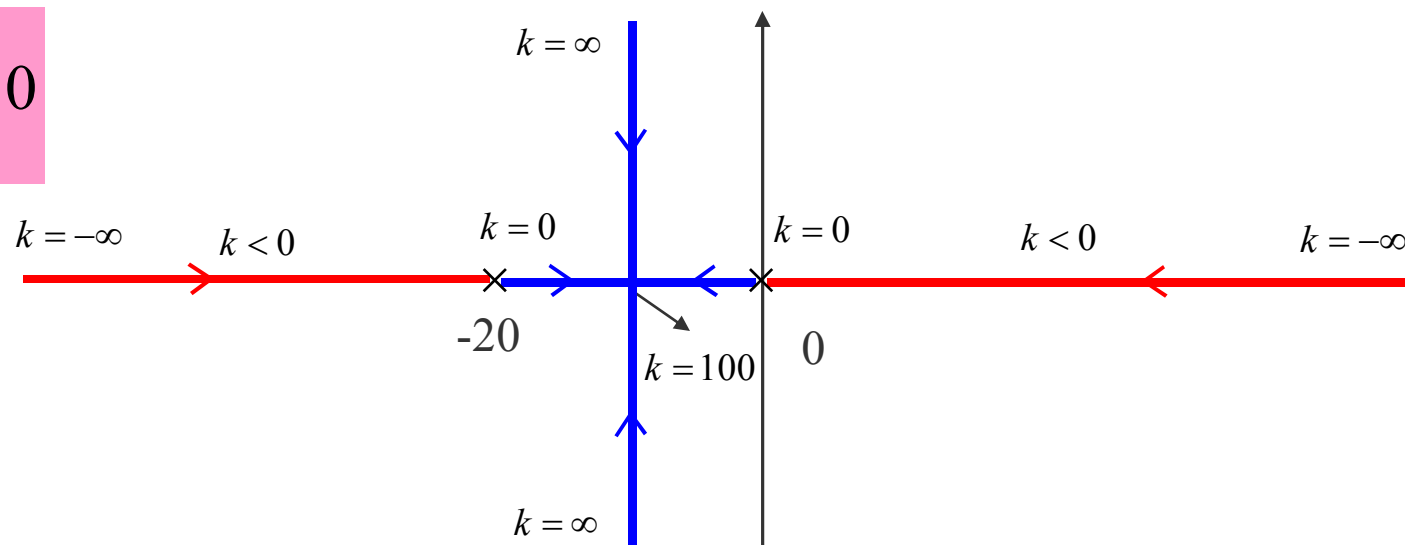
نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 2: Specify the poles and zeros of $f(s)$. The root loci lie on the poles of $f(s)$ for $k=0$ and lies on the zeros of $f(s)$ for $k=\pm\infty$

قانون ۲: قطب و صفرهای $f(s)$ را مشخص کنید. مکان ریشه در $k=0$ روی قطبهای $f(s)$ و در $k=\pm\infty$ روی صفرهای $f(s)$ قرار دارد.

$$1 + k \frac{1}{s(s+20)} = 0$$



The Root Locus procedure

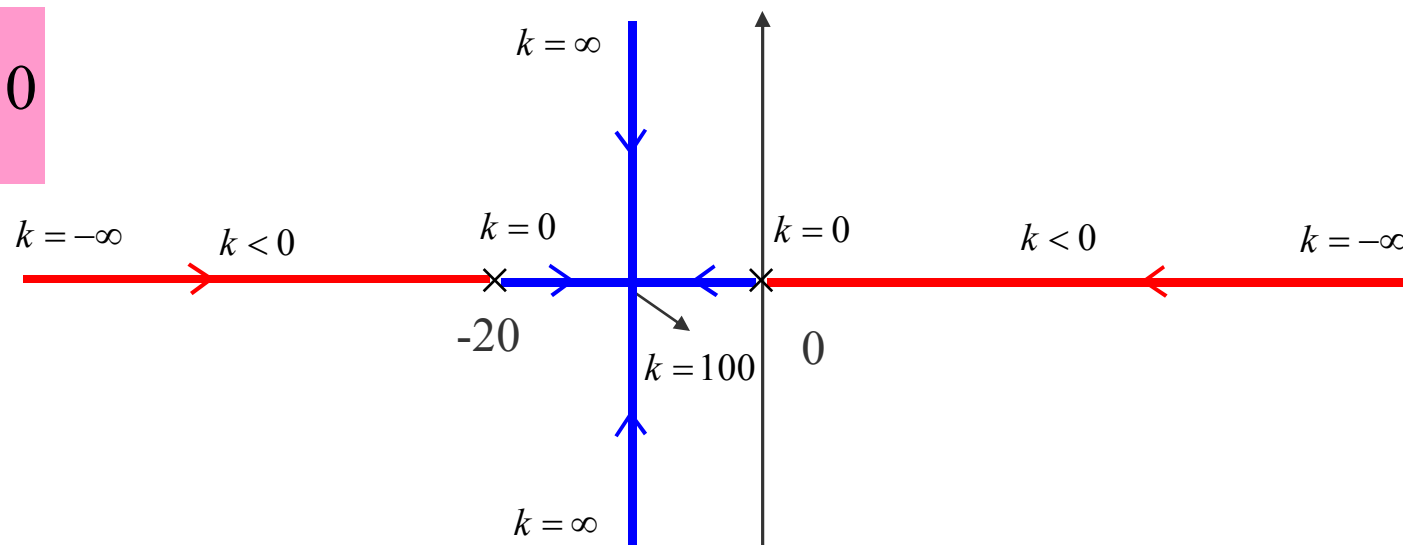
نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 3: Define the real axis section for positive and negative value of k .

قانون ۳: محور حقیقی را برای مقادیر مثبت و منفی k مشخص کنید

$$1 + k \frac{1}{s(s+20)} = 0$$



The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 4: Find the **asymptotes** and **center of asymptotes** for positive and negative values of k .

number of asymptotes = $n_p - n_z$

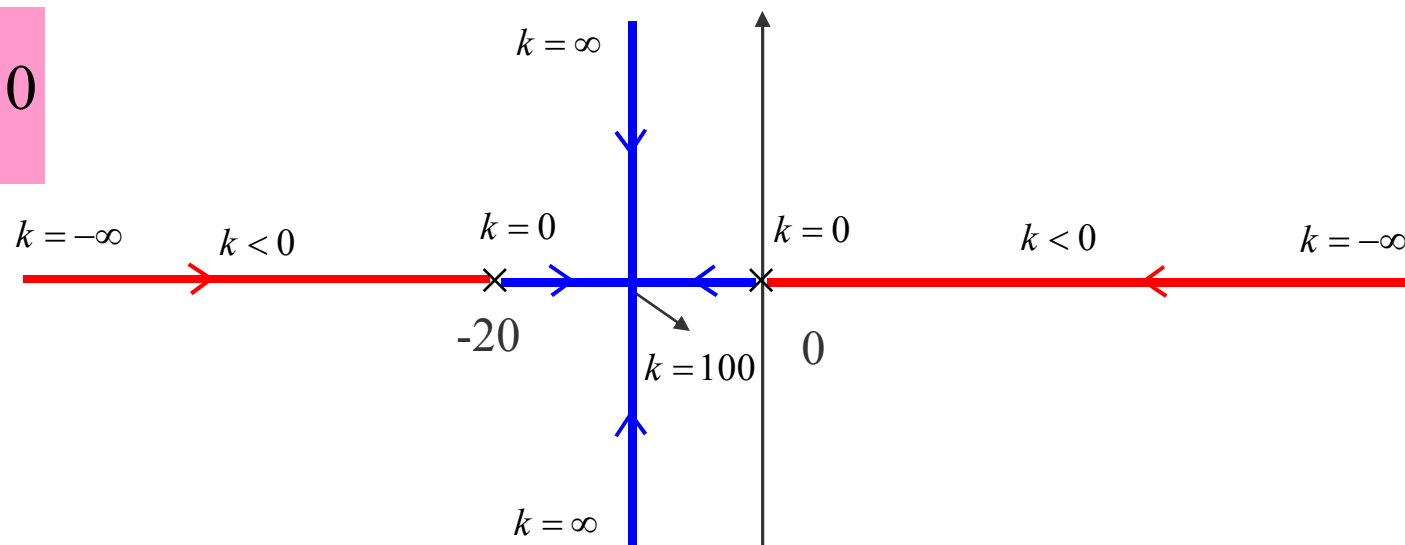
$$\begin{cases} k > 0 & \theta = \frac{(2m+1)\pi}{|n_p - n_z|} & m = 0, 1, 2, \dots \\ k < 0 & \theta = \frac{2m\pi}{|n_p - n_z|} & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Asymptotes center

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z}$$

قانون ۴: **مجانبهها** و **محل تلاقی مجانبها** را برای مقادیر مثبت و منفی k تعیین کنید.

$$1 + k \frac{1}{s(s+20)} = 0$$



The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 5: Find the break point.

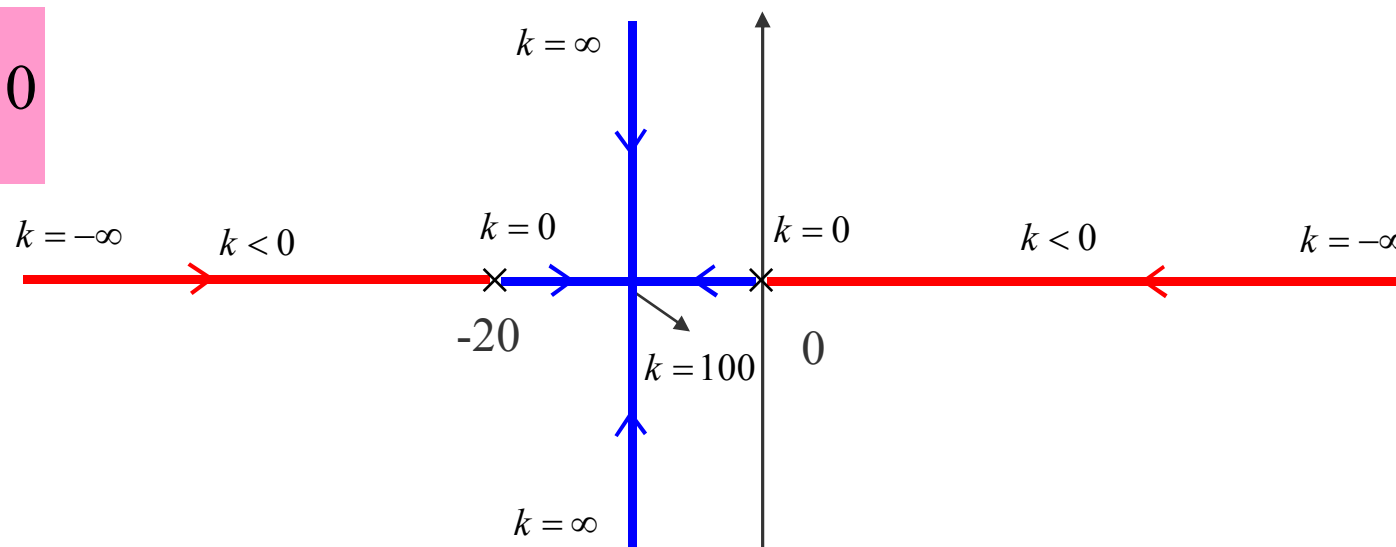
قانون ۵: نقطه شکست را بیابید.

$$k = -\frac{1}{f(s)}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0$$

$s = \text{break point}$

$$1 + k \frac{1}{s(s+20)} = 0$$



$$k = -s^2 - 20s$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -2s - 20 = 0$$

$$s = -10$$

The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

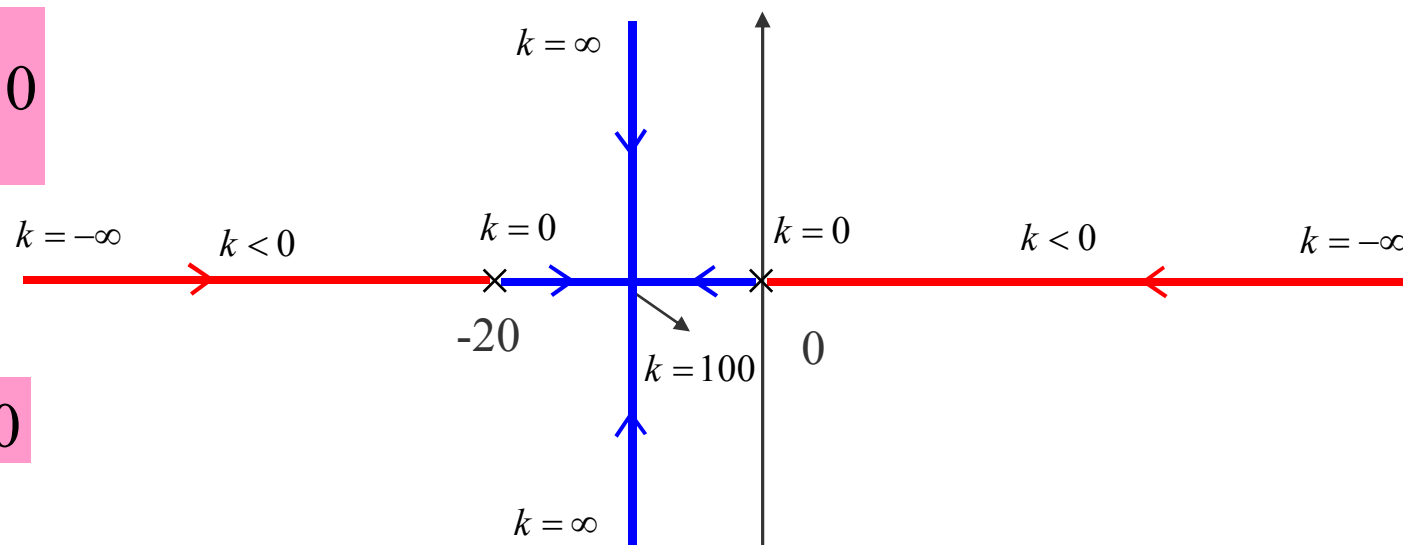
$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 6: Find the cross of root locus with imaginary axis by Routh Hurwitz criteria.

قانون ۶: نقطه تلاقی با محور موهومی را توسط روش روت هرویتز تعیین کنید.

$$1 + k \frac{1}{s(s+20)} = 0$$

$$s^2 + 20s + k = 0$$



$k = 0$ is the cross point of root locus and imaginary axis ($s = 0$)

Example 2: Draw the complete root loci of the following system.

مثال ۲: مکان کامل ریشه ها را در سیستم زیر بیابید.

$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

Rule 1: Specify the equation **exactly** in the standard form.

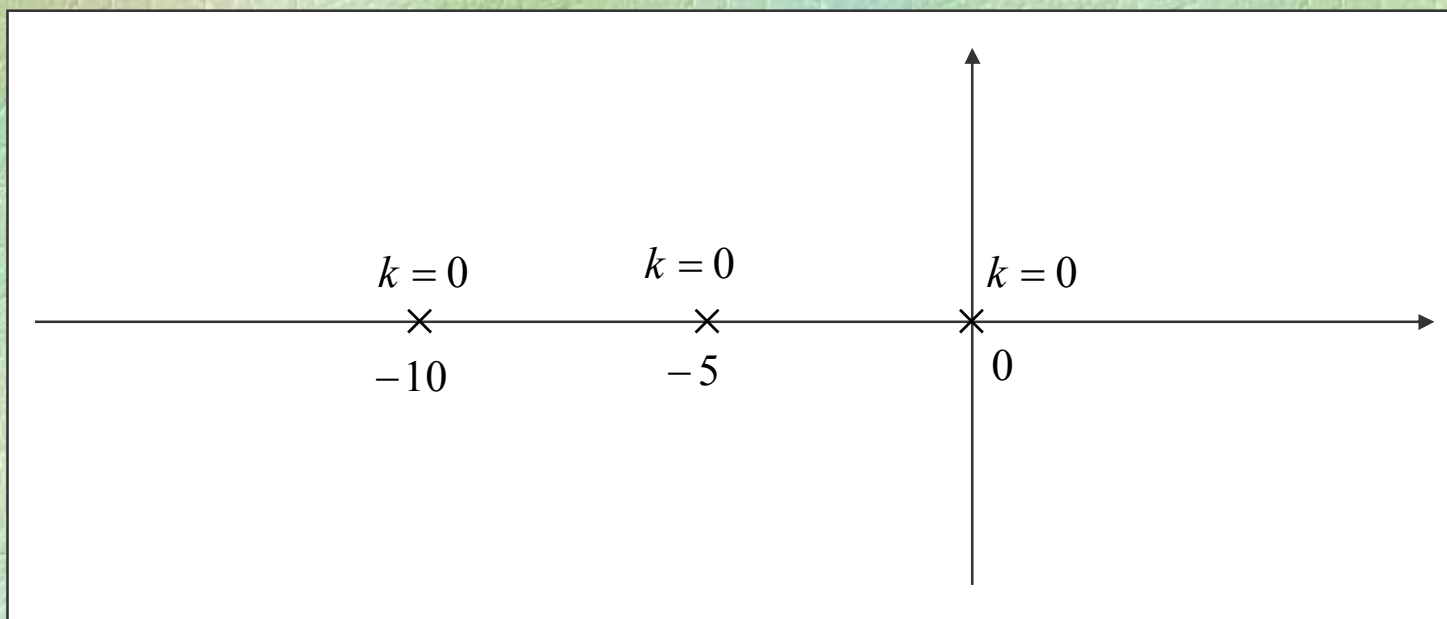
قانون اول: سیستم را **دقیقا** بصورت استاندارد بیان کنید.

Clearly it is ok

$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

Rule 2: Specify the poles and zeros of $f(s)$. The root loci lie on the poles of $f(s)$ for $k=0$ and lie on the zeros of $f(s)$ for $k=\pm\infty$

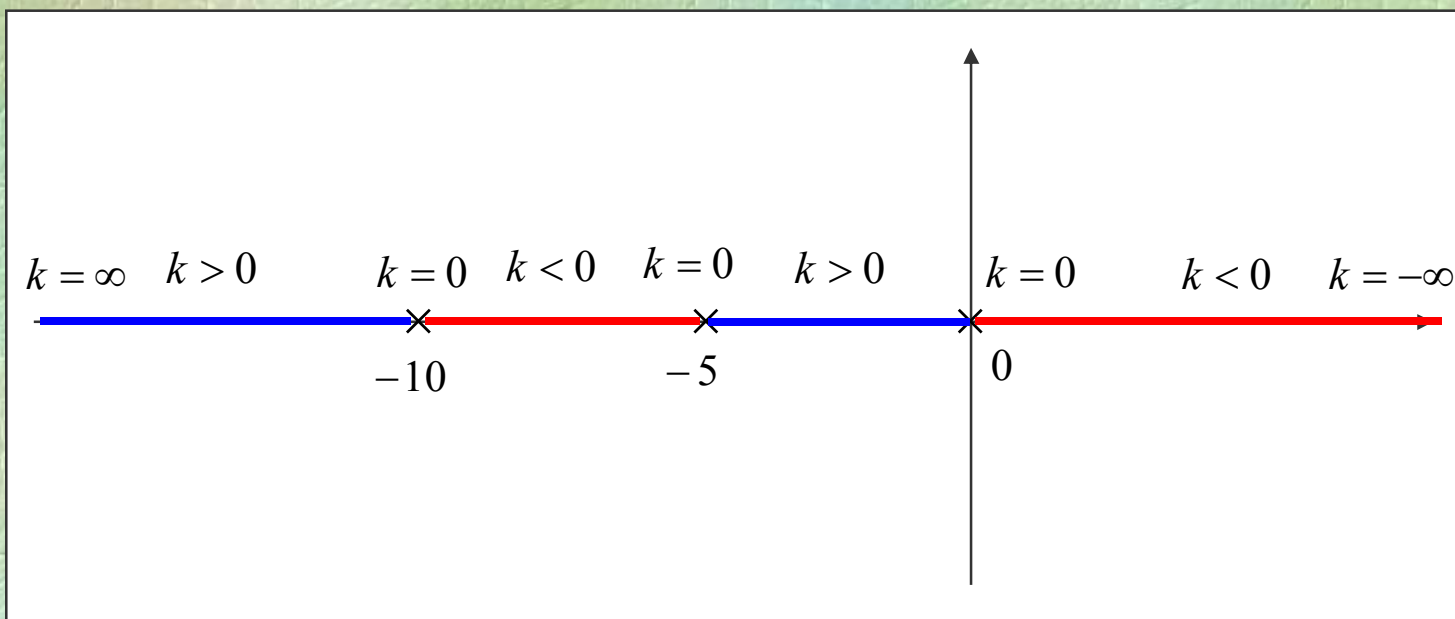
قانون ۲: قطب و صفرهای $f(s)$ را مشخص کنید. مکان ریشه در $k=0$ روی قطبهای $f(s)$ و در $k=\pm\infty$ روی صفرهای $f(s)$ قرار دارد.



$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

Rule 3: Define the real axis section for positive and negative value of k .

قانون ۳: محور حقیقی را برای مقادیر مثبت و منفی k مشخص کنید



$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

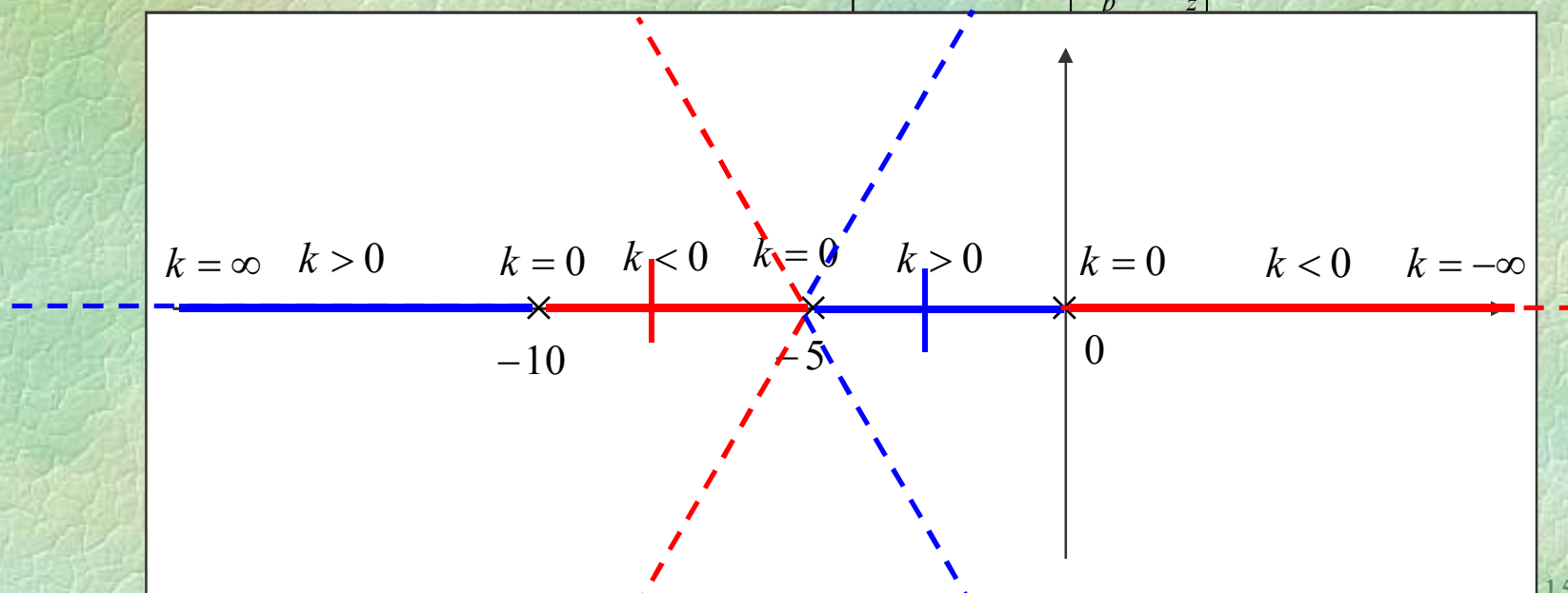
Rule 4: Find the **asymptotes** and **center of asymptotes**.

Asymptotes center

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z} = \frac{-10 - 5}{3} = -5$$

قانون ۴: **مجانبيها و محل تلاقي مجانبها.**

$$\begin{cases} k > 0 & \theta = \frac{(2m+1)\pi}{|n_p - n_z|} = \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \\ k < 0 & \theta = \frac{2m\pi}{|n_p - n_z|} = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$



The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 5: Find the break point.

قانون ۵: نقطه شکست را بیابید.

$$k = -\frac{1}{f(s)} \quad \frac{\partial k}{\partial s} = 0 \quad s = \text{break point}$$

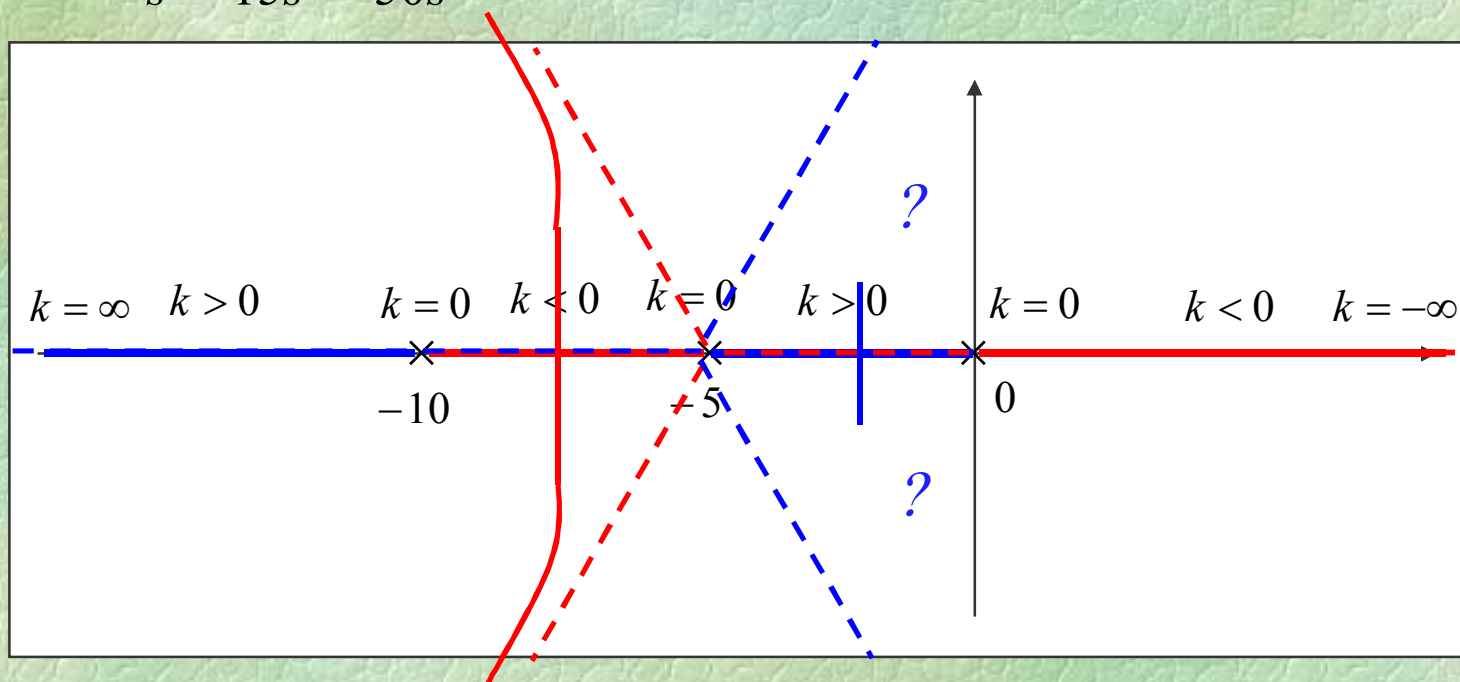
$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

Rule 5: Find the break point.

قانون ۵: نقطه شکست را بیابید.

$$k = -\frac{1}{f(s)} = -s(s+5)(s+10) \quad \frac{\partial k}{\partial s} = -3s^2 - 30s - 50 \quad s = -7.89, -2.11$$

$$= -s^3 - 15s^2 - 50s$$



The Root Locus procedure

نحوه رسم مکان ریشه ها

$$1 + kf(s) = 0$$

Rule 6: Find the cross of root locus with imaginary axis by Routh Hurwitz criteria.

قانون ۶: نقطه تلاقی با محور موهومی را توسط روش روت هرویتز تعیین کنید.

$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

قانون ۶: نقطه تلاقی با محور موهومی

Rule 6: Find the cross of root locus with imaginary axis

$$s(s+5)(s+10) + k = 0$$

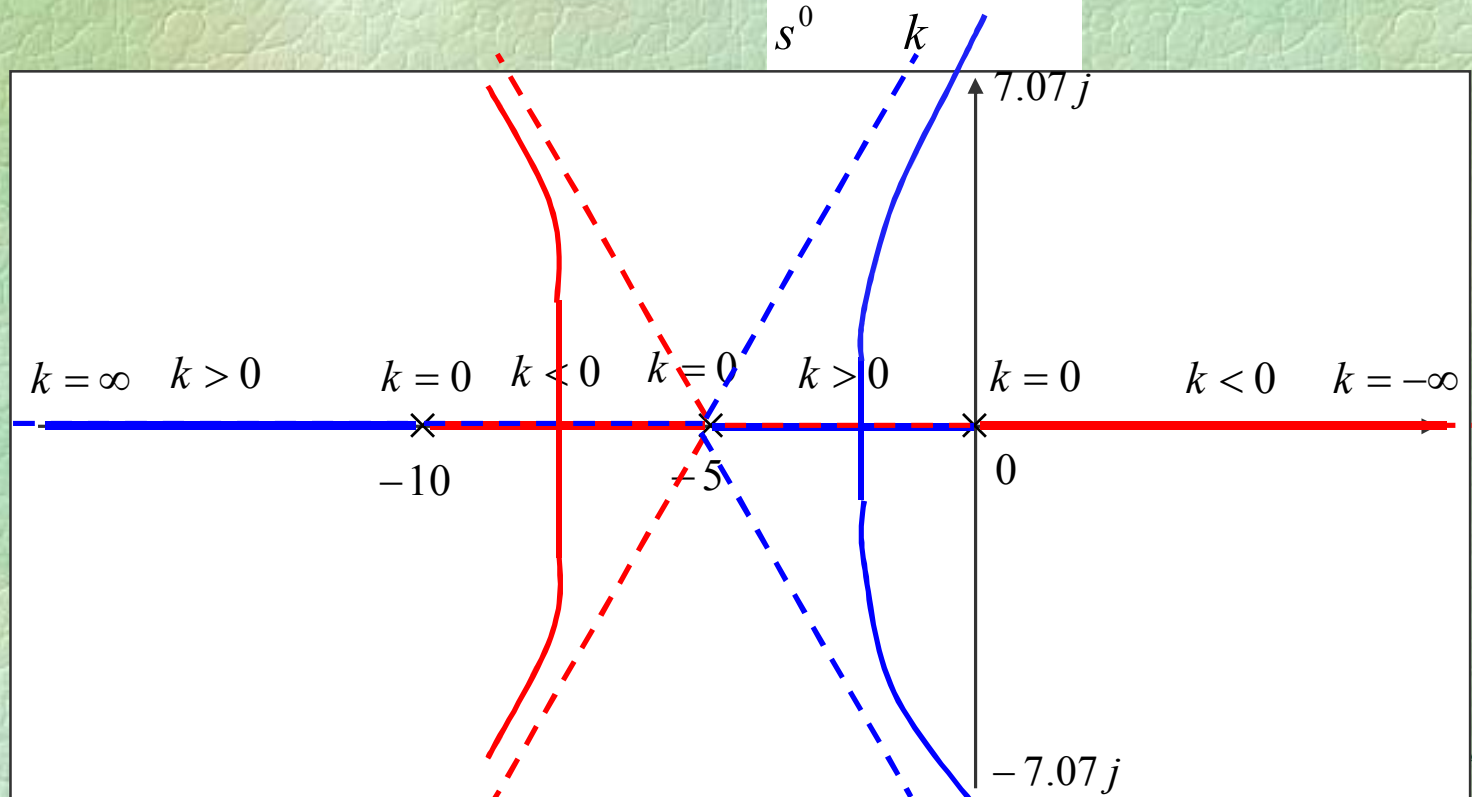
s^3	1	50
s^2	15	k
s	$\frac{750-k}{15}$	0
s^0	k	

$$15s^2 + 750 = 0$$

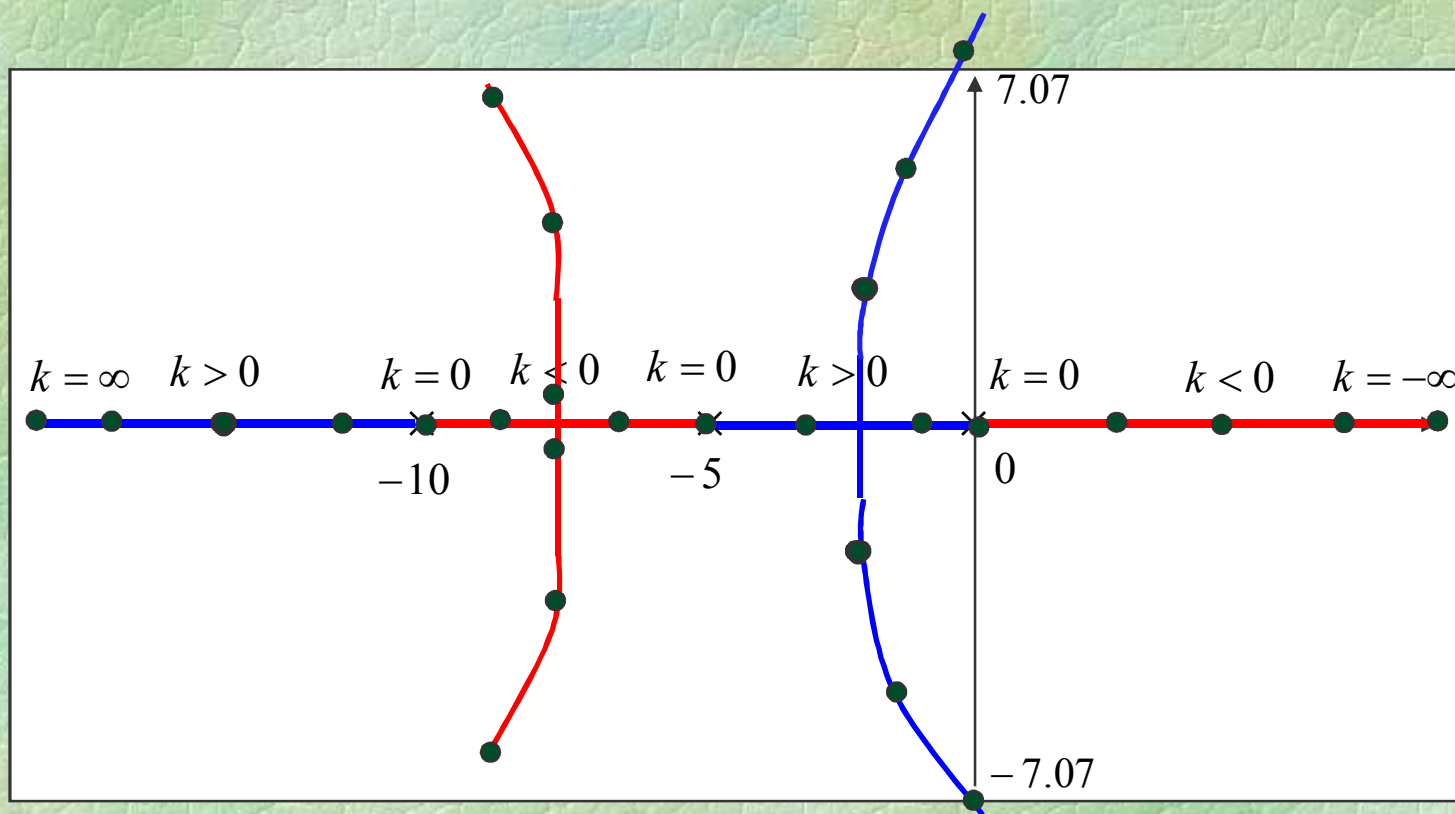
$$s = \pm j7.07$$

$$750 - k = 0$$

$$k = 750$$



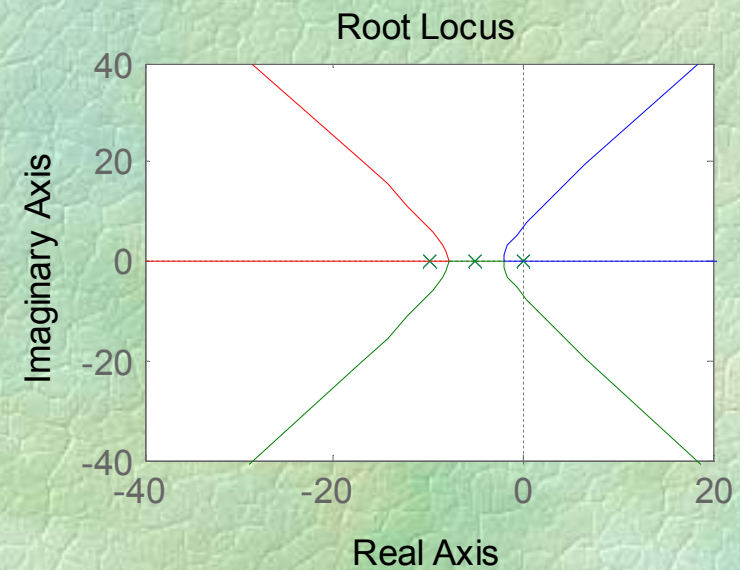
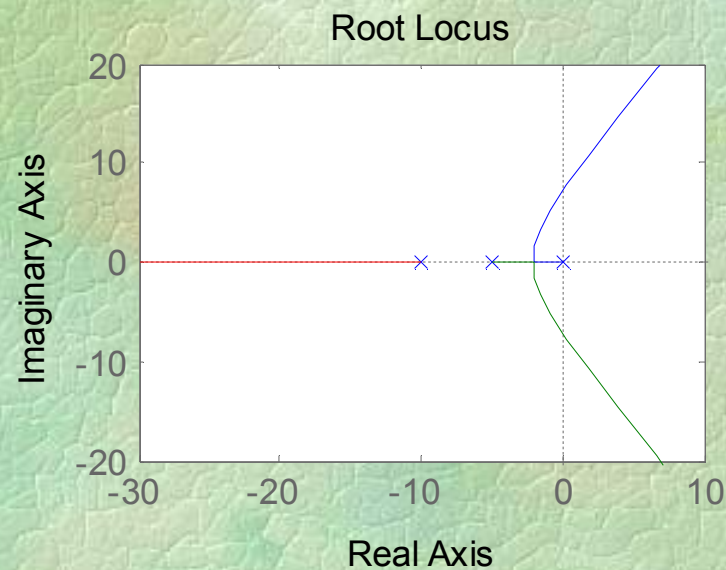
$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$





$$1 + k \frac{1}{s(s+5)(s+10)} = 0$$

```
rlocus(1,[1 15 50 0]); hold on; rlocus(-1,[1 15 50 0])
```



Example 3: Draw the complete root loci of following system.

مثال ۳: مکان کامل ریشه ها را در سیستم زیر بیابید.

$$1 + 10 \frac{(s + k)(s + 3)}{s(s^2 - 1)} = 0$$

Rule 1: Specify the equation **exactly** in the standard form.

قانون اول: سیستم را **دقیقا** بصورت زیر استاندارد کنید.

$$s(s^2 - 1) + 10(s + k)(s + 3) = 0$$

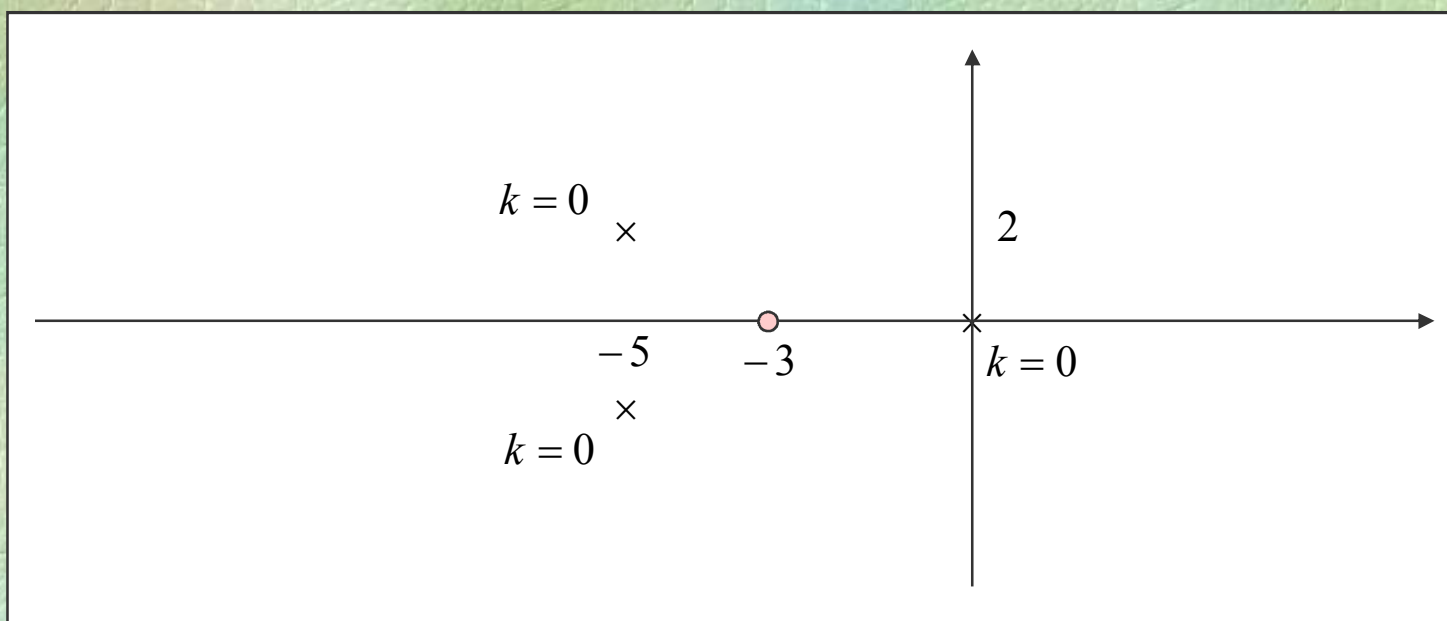
$$1 + k \frac{10(s + 3)}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

Example 4:

$$1 + k \frac{10(s + 3)}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

Rule 2: Specify the poles and zeros of $f(s)$. The root loci lie on the poles of $f(s)$ for $k=0$ and lie on the zeros of $f(s)$ for $k=\pm\infty$

قانون ۲: قطب و صفرهای $f(s)$ را مشخص کنید. مکان ریشه در $k=0$ روی قطبهای $f(s)$ و در $k=\pm\infty$ روی صفرهای $f(s)$ قرار دارد.

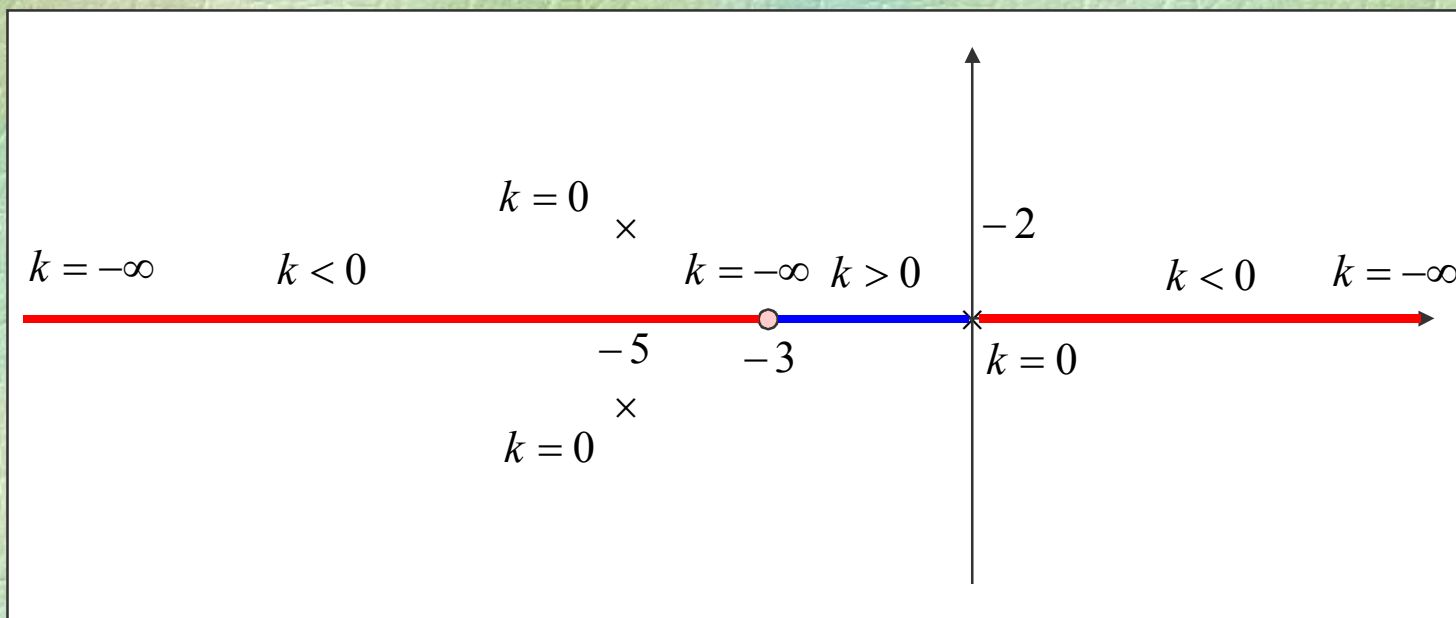


Example 4:

$$1 + k \frac{10(s + 3)}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

Rule 3: Define the real axis section for positive and negative value of k .

قانون ۳: محور حقیقی را برای مقادیر مثبت و منفی k مشخص کنید



Example 4:

$$1 + k \frac{10(s+3)}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

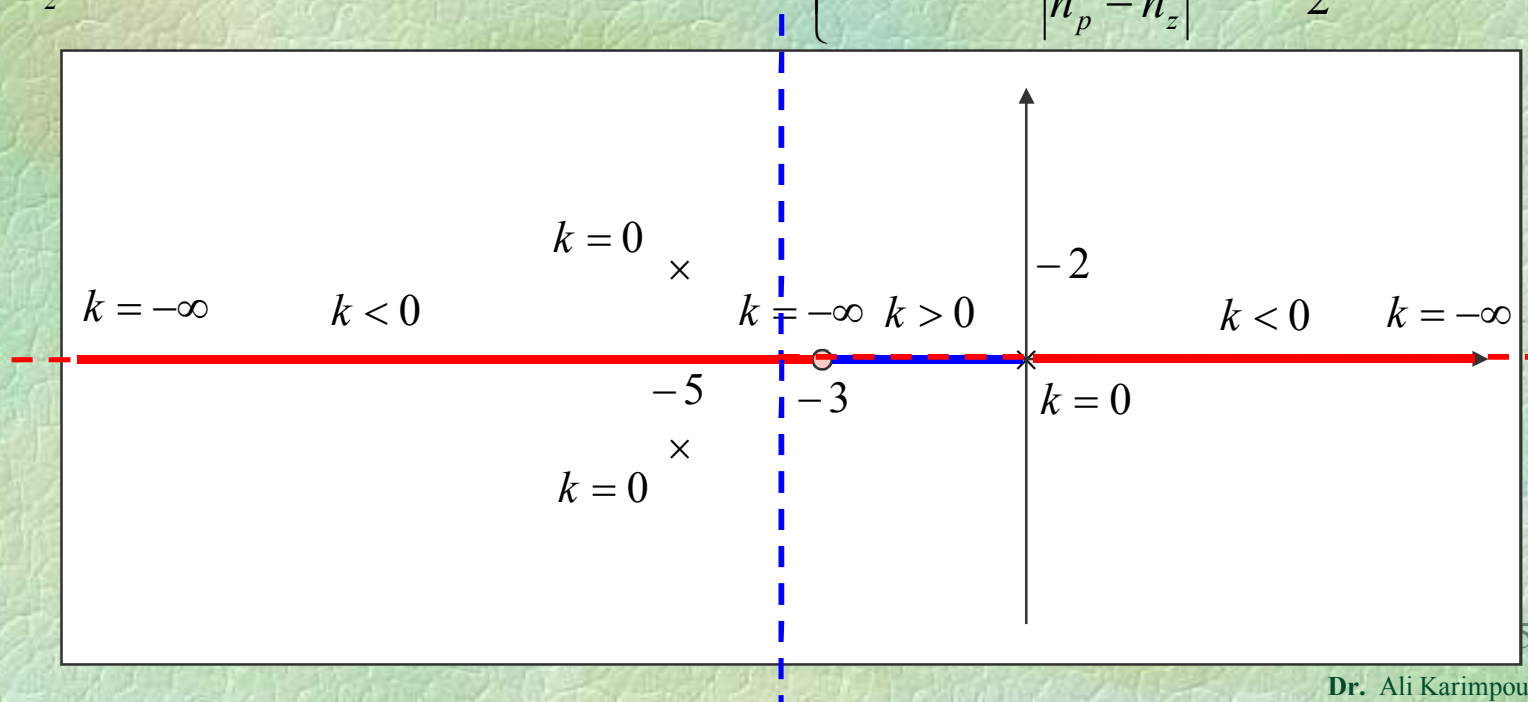
Rule 4: Find the **asymptotes** and **center of asymptotes**.

Asymptotes center

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i}{n_p - n_z} = \frac{-10 - (-3)}{2} = -3.5$$

قانون ۴: **مجانبيها** و **محل تلاقي** **مجانبيها**.

$$\begin{cases} k > 0 & \theta = \frac{(2m+1)\pi}{|n_p - n_z|} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ k < 0 & \theta = \frac{2m\pi}{|n_p - n_z|} = 0, \frac{2\pi}{2} \end{cases}$$



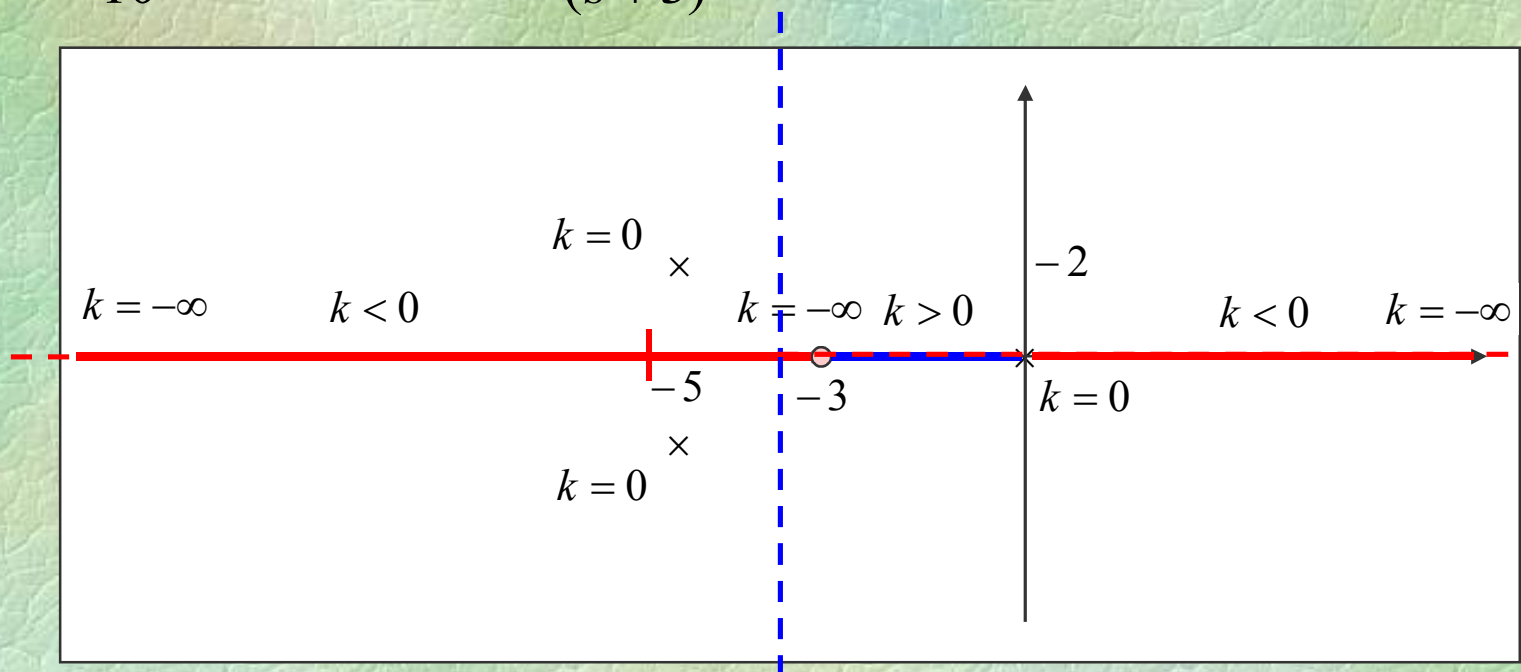
Example 4:

$$1 + k \frac{10(s+3)}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

Rule 5: Find the break point. قانون ۵: نقطه شکست را بیابید.

$$k = -\frac{1}{f(s)} = -\frac{1}{10} \frac{(s^3 + 10s^2 + 29s)}{(s+3)}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -\frac{1}{10} \frac{(3s^2 + 20s + 29)(s+3) - (s^3 + 10s^2 + 29s)}{(s+3)^2} = 0 \quad s = -5.47$$



$$1 + k \frac{10(s+3)}{s(s^2+10s+29)} = 0$$

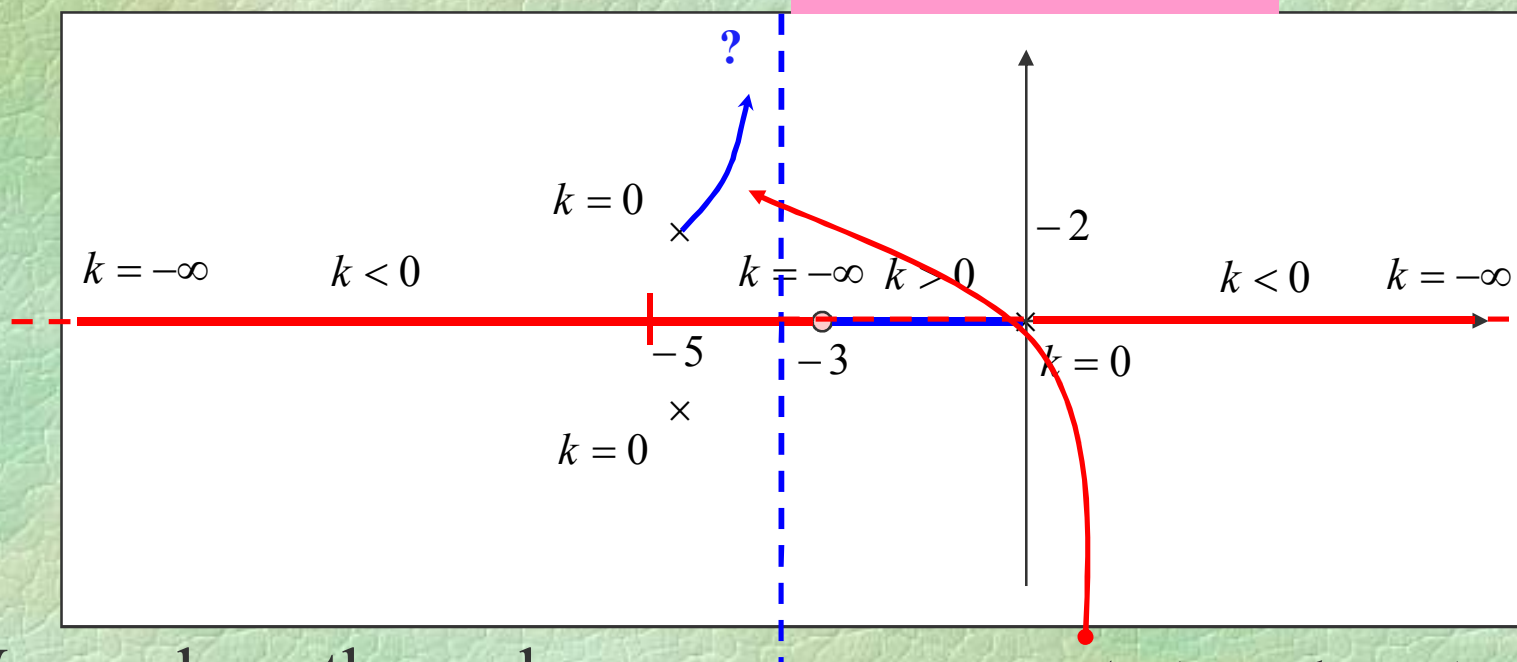
قانون ۶: نقطه تلاقی با محور موهومی

Rule 6: Find the cross of root locus with imaginary axis

$$s^3 + 10s^2 + (29 + 10k)s + 30k = 0$$

s^3	1	$29 + 10k$
s^2	10	$30k$
s^1	$29 + 7k$	0
s^0	$30k$	

$$\Rightarrow k > 0$$



We need another rule.

به قانون دیگری نیاز داریم.

Exercises

تمرینها

1- The transfer function of a single-loop control system are given as:

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+3)}$$

$$H(s) = 1 + T_d s$$

Construct the root loci of the Zeros of $1+G(s)H(s)=0$ for $-\infty < T_d < \infty$

2- The open loop transfer function of a unity-feedback (negative sign) system is:

$$G(s) = K \frac{e^{-0.1s}}{s(s+1)(s+2)}$$

Construct the complete root loci of the characteristic equation.

Exercises

تمرینها

3- The open loop transfer function of a unity-feedback (negative sign) system is:

$$G_p(s) = \frac{K}{(s+5)^n}$$

Construct the complete root loci of the characteristic equation for
Let $n=1$, $n=2$, $n=3$ and $n=4$

4- The open loop transfer function of a unity-feedback (negative sign) system is:

$$G(s) = \frac{K(s+\alpha)(s+3)}{s(s^2-1)}$$

- a) Construct the root loci for $-\infty < K < \infty$, with $\alpha=5$.
- b) Construct the root loci for $-\infty < \alpha < \infty$, with $K=5$.

Exercises

تمرینها

5- The open loop transfer function of a unity-feedback (negative sign) system is:

$$G(s) = \frac{500p}{s(s+10)(s+p)}$$

Construct the root loci for $0 < p < \infty$

6- Consider following system

$$1 + k_1 \frac{1+s}{s^3} = 0$$

Construct the root loci for $0 < k_1 < \infty$

Exercises

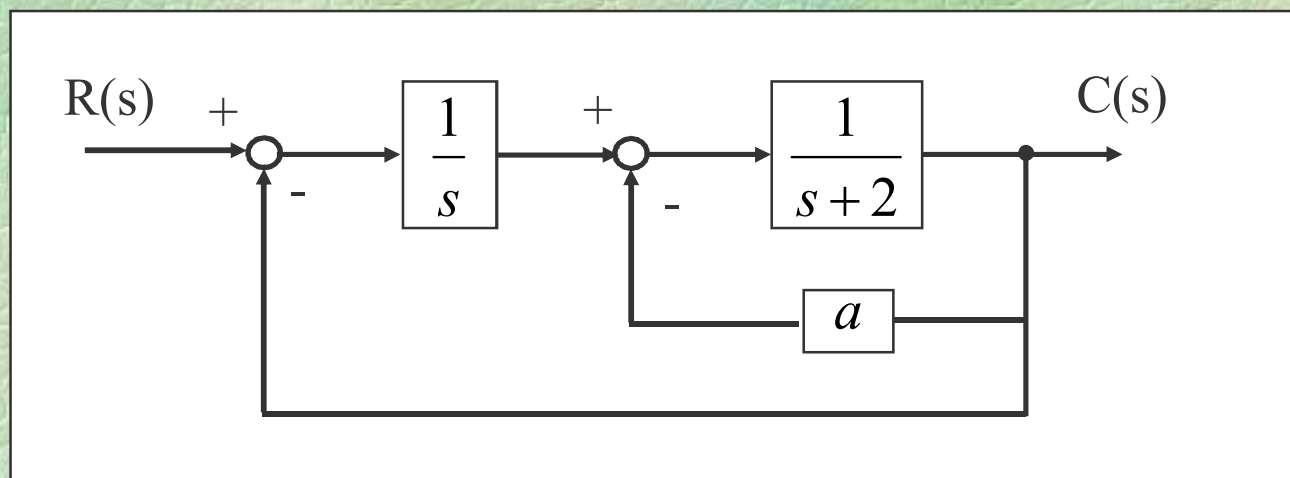
تمرینها

7- Consider following system

$$1 + k_2 \frac{s^2}{s^3 + k_1 s + k_1} = 0$$

For $k_1=0$, $k_1=1$ and $k_1=10$ construct the root loci for $0 < k_2 < \infty$.

8- Construct the root loci of the closed loop poles of the following system for $0 < a < \infty$ (Midterm spring 2008).



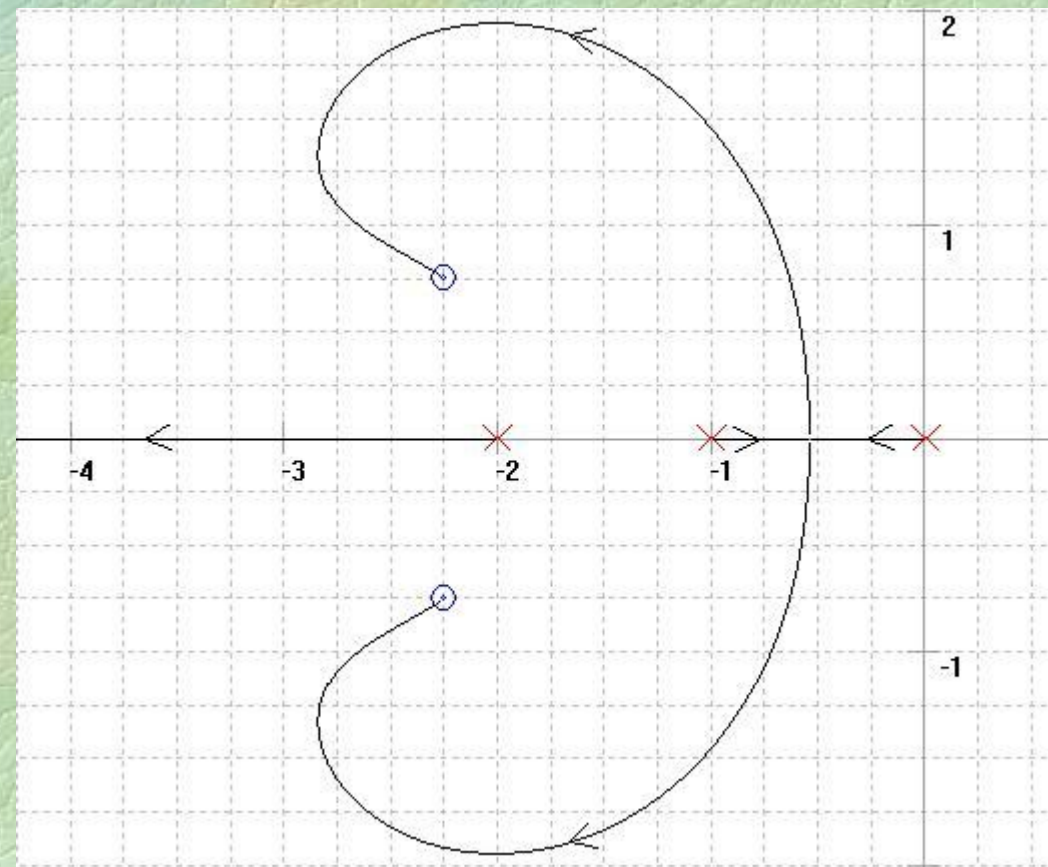
Exercises

تمرینها

9- Find the root-locus graph for the following system.

$$1 + K \frac{s^2 + 4.5s + 5.625}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

The Answer :



Exercises

تمرینها

10- The open loop transfer function of a unity-feedback (negative sign) system is:

$$G(s) = \frac{10}{s(s - p)}$$

Construct the root loci for $0 < p < \infty$ (Final 1391)