LINEAR CONTROL SYSTEMS

Ali Karimpour

Associate Professor

Ferdowsi University of Mashhad

Lecture 8

Pole placement

Topics to be covered include:

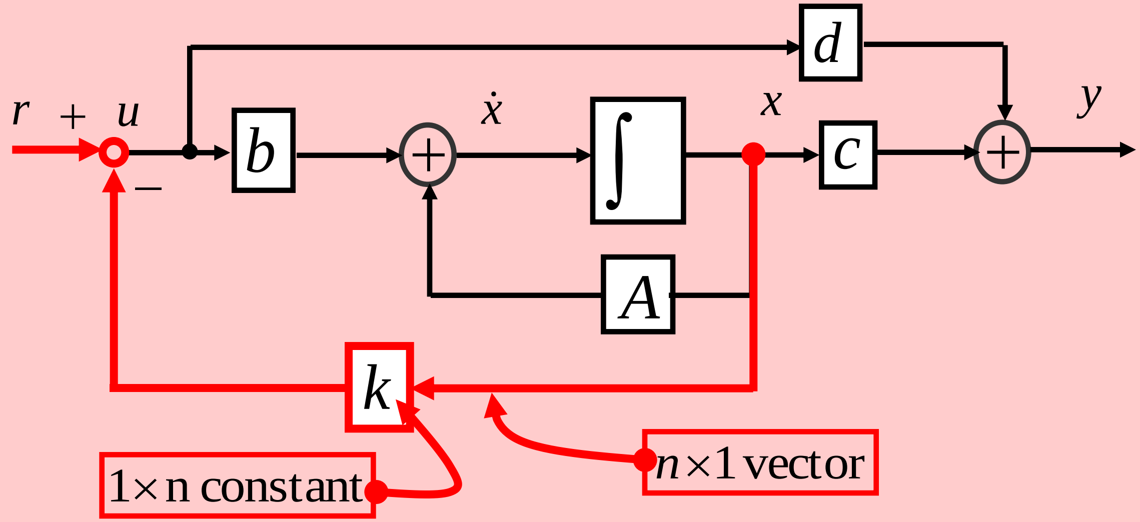
- Pole placement with state feedback.
- State estimation

Use of state feedback to control a system

استفاده از فیدبک حالت برای کنترل سیستم

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$



State feedback ?

$$u = r - kx$$

Use of state feedback to control a system

استفاده از فیدبک حالت برای کنترل سیستم

What are the eigenvalues?

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

$$\text{roots of } |sI - A| = 0$$

Let u=r-kx where k is an $1 \times n$ *vector*

$$\dot{x} = Ax + b(r - kx)$$
$$y = cx + d(r - kx)$$

$\longrightarrow$

$$\dot{x} = (A - bk)x + br$$
$$y = (c - dk)x + dr$$

New eigenvalues?

$$\text{roots of } |sI - A + bk| = 0$$

Use of state feedback to control a system

استفاده از فیدبک برای کنترل سیستم

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad (I)$$
$$y = cx + du$$

$$u = r - kx$$

state feedback

$$\dot{x} = (A - bk)x + br$$
$$y = (c - dk)x + dr$$

Is it possible to assign the eigenvalues arbitrarily?

Theorem: If the *n*-dimensional state equation (I) is controllable, then by state feedback *u=r-kx*, where *k* is a 1×n real constant vector, the eigenvalues of *A-bk* can arbitrarily be assigned provided that complex conjugate eigenvalues are assigned in pairs.

قضیه: اگر معادلات حالت *n*-بعدی (I) کنترل پذیر باشد، آنگاه با فیدبک حالت *u=r-kx* ، که *k* یک بردار ثابت *1×n* می باشد، می توان مقادیر ویژه *A-bk* را بطور دلخواه تعیین نمود البته باید توجه نمود که مقادیر ویژه مختلط باید بصورت مزدوج انتخاب شود.

Example 1: Is it possible to assign the eigenvalues of following system on arbitrarily position؟

مثال ۱: آیا می توان مقادیر ویژه سیستم زیر را بطور دلخواه جابجا کرد؟

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -14\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u \Rightarrow S=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -16\\ 2 & 1 & -28\\ 0 & 2 & -13\end{bmatrix}$$

$$|S|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -16\\ 2 & 1 & -28\\ 0 & 2 & -13\end{vmatrix}=-21 \Rightarrow$$ *System is controllable*

So It is possible to assign the eigenvalues on arbitrarily position.

لذا می توان مقادیر ویژه را در مکانهای دلخواه قرار داد.

Example 2: Consider following system.

مثال ۲: سیستم مقابل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \textit{System is not controllable}$$

I) Is it possible assign the eigenvalues on an arbitrarily places? **Clearly No**

I) آیا می توان مقادیر ویژه را در مکانهای دلخواه قرار داد؟ **واضح است که خیر**

II) Is it possible to assign the eigenvalues on -3, -4, -2 ? **Clearly Yes**

II) آیا می توان مقادیر ویژه را در 4- ,3- ,2- قرار داد؟ **واضح است که بله**

III) Is it possible to the eigenvalues on -13, -2±3j ? **Clearly No**

III) آیا می توان مقادیر ویژه را در 13- ,2±3j- قرار داد؟ **واضح است که خیر**

IV) Is it possible to the eigenvalues on -3, -2+3j, -2-6j ? **Clearly No**

IV) آیا می توان مقادیر ویژه را در -3, -2+3j, -2-6j قرار داد؟ **واضح است که خیر**

Methods of pole placement

روشهای تعیین محل قطبها

1- Direct method.

۱- روش مستقیم

2- Use of similarity transformation.

۲- استفاده از تبدیلات همانندی

Direct method of pole placement
روش مستقیم تعیین محل قطبها

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

$$\text{Let } u = r - [k_1 \;\; k_2 \;\; \dots \;\; k_n]x$$

$$\text{Find:} \quad \underbrace{\left| sI - A + bk \right|}_{\text{Polynomial of Degree n}} = \underbrace{\text{Desired characteristic equation}}_{\text{Polynomial of Degree n}}$$

Then determine k_1, k_2, … , k_n from above equation

Use of similarity transformation for pole placement

استفاده از تبدیلات همانندی در تعیین محل قطبها

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad w = Px \qquad \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Characteristic equation of system is : $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$

$$\hat{A} - \hat{b}\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - \hat{k}_0 & -a_1 - \hat{k}_1 & -a_2 - \hat{k}_2 & \dots & -a_{n-1} - \hat{k}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$-b_0 \qquad -b_1 \qquad -b_2 \qquad -b_{n-1}$$

Desired characteristic equation is : $s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0$

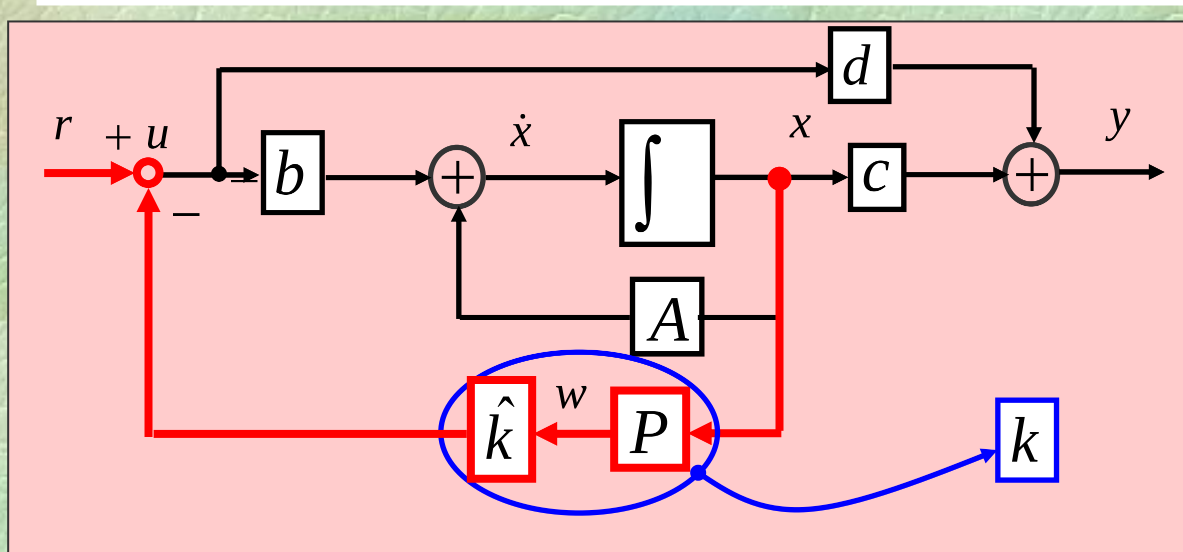
Use of similarity transformation for pole placement

استفاده از تبدیلات همانندی در تعیین محل قطبها

$$\hat{A}-\hat{b}\hat{k}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0-\hat{k}_0 & -a_1-\hat{k}_1 & -a_2-\hat{k}_2 & \dots & -a_{n-1}-\hat{k}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$-b_0 \qquad -b_1 \qquad -b_2 \qquad -b_{n-1}$$

$$\hat{k}=\begin{bmatrix} b_0-a_0 & b_1-a_1 & b_2-a_2 & \dots & b_{n-1}-a_{n-1} \end{bmatrix}$$



$$u=r-\hat{k}w=r-\hat{k}Px=r-kx \longrightarrow k=\hat{k}P$$

Example 3: Assign the poles on -2±j if it is possible.

مثال ۳: در صورت امکان قطبها را در -2±j قرار دهید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$|S|=-1\neq 0$ Method I

System is controllable

So it is possible to assign the poles on -2±j .

$$A-bk=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}[k_0 \quad k_1]=\begin{bmatrix}1-k_0 & -1-k_1\\ -k_0 & -1-k_1\end{bmatrix}$$

$$|sI-A+bk|=\begin{vmatrix}s-1+k_0 & 1+k_1\\ k_0 & s+1+k_1\end{vmatrix}=s^2+(k_0+k_1)s-1-k_1$$

$$s^2+(k_0+k_1)s-1-k_1=(s+2+j)(s+2-j)=s^2+4s+5 \rightarrow k=[10 \quad -6]$$

Example 3: Assign the poles on -2±j if it is possible.

مثال ۳: در صورت امکان قطبها را در -2±j قرار دهید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |S| = -1 \neq 0$$

Method II

System is controllable

So it is possible to assign the poles on -2±j .

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \end{bmatrix} \qquad q = [0 \quad 1] S^{-1} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

System characteristic equation: s^2+0s-1

Desired characteristic equation: $(s+2+j)(s+2-j)=s^2+4s+5$

$$\hat{k} = [b_0 - a_0 \quad b_1 - a_1] = [5-(-1) \quad 4-0] = [6 \quad 4] \rightarrow \boxed{k = \hat{k}P = [10 \quad -6]}$$

MATLAB place(a,b,[-2+i -2-i])

Example 4: It is not always this easy, as lack of controllability might be an issue.

Consider this system:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

With the same control approach

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

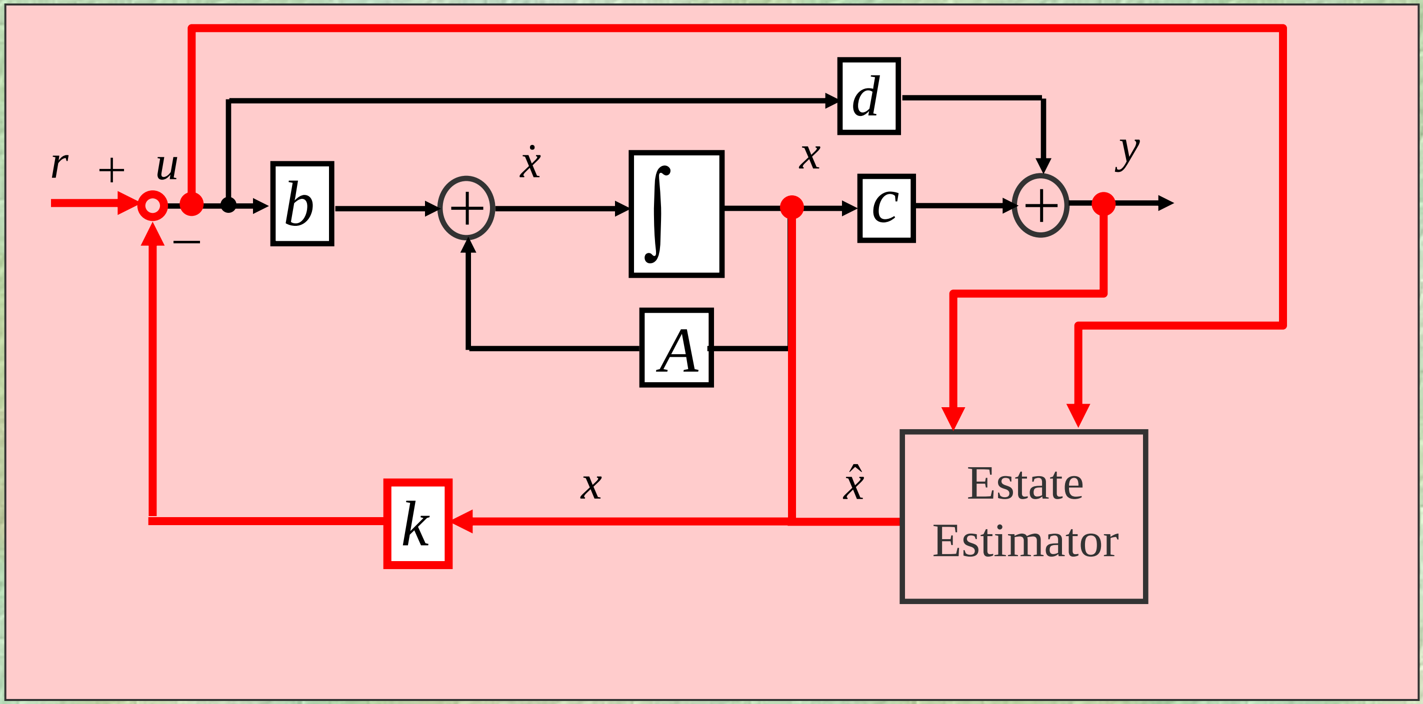
$$\det(sI - A_{cl}) = (s - 1 + k_1)(s - 2) = 0$$

So the feedback control can modify the pole at s = 1, but it cannot move the pole at s = 2.

s=2 is a fixed mode.

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک

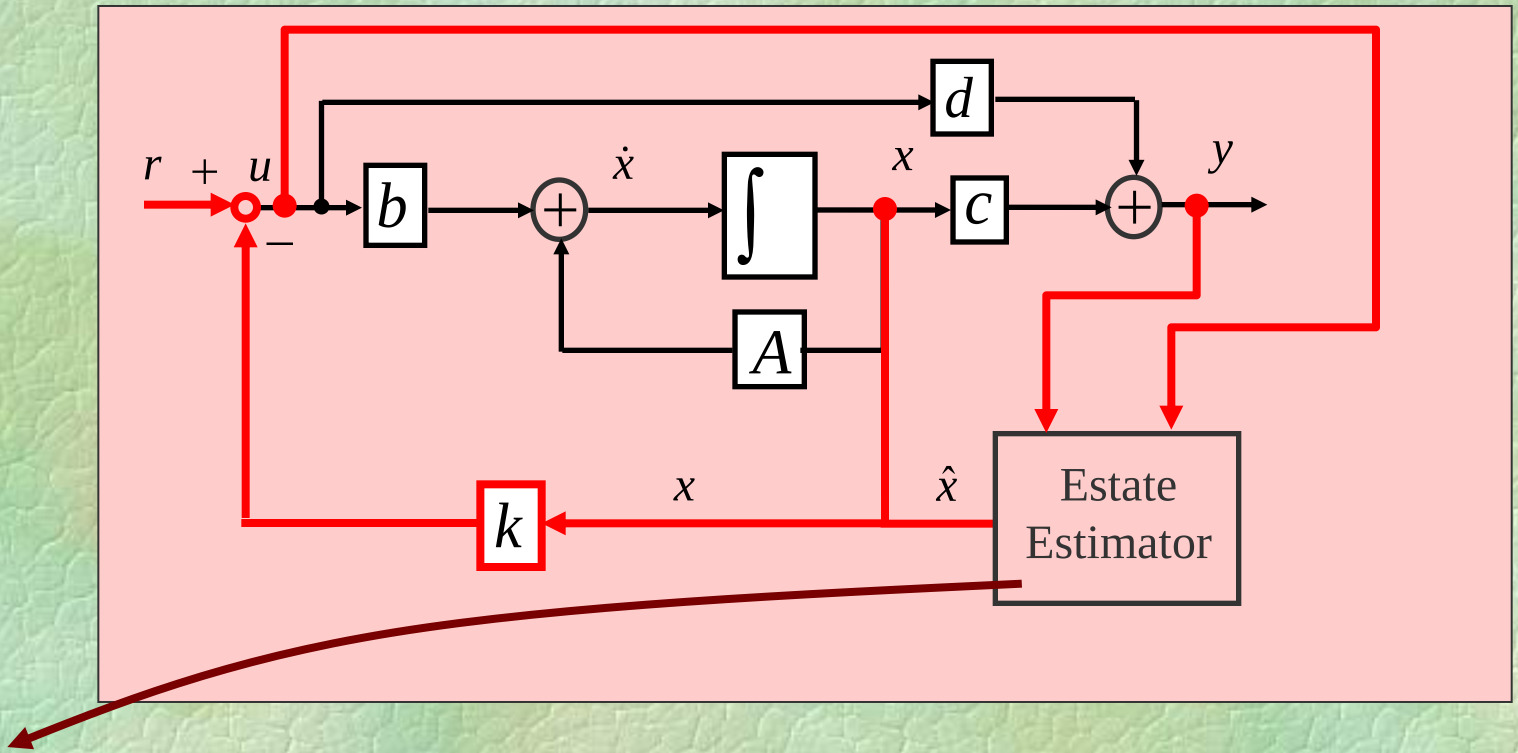


States are not available!

Condition for $\hat{x} \to x$

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک

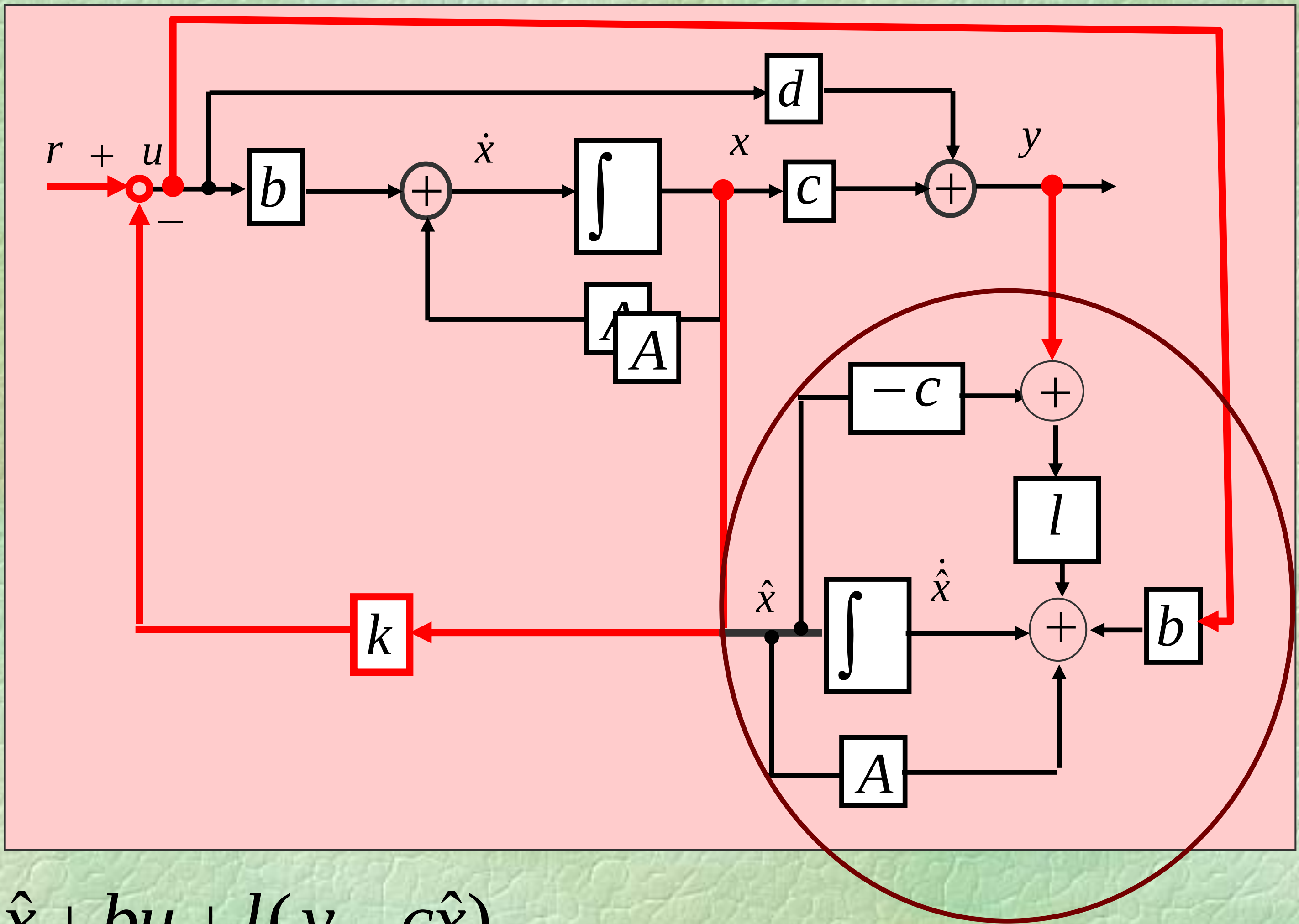


$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(cx - c\hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c\hat{x})$$

Use of state estimation to use in feedback loop

استفاده از تخمین زن حالت برای استفاده در مسیر فیدبک



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c\hat{x})$$

Estimator

Exercises

1- Is it possible to assign the eigenvalues of following system on arbitrarily places?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 0]x$$

2- Is it possible to assign the eigenvalues of following system on arbitrarily places?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -6 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad 2 \quad -1]x$$

3- a) Use a state feedback to assign the eigenvalues of following system on -4, -1 , -6?
b) Use a state feedback to assign the eigenvalues of following system on -4, -2 , -6?
c) Use a state feedback to assign the eigenvalues of following system on -1, -2 ±6j?

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0]w$$

Exercises (Cont.)

4- Determine a state feedback control for part (II) of example 2.

5- Repeat example 3 for following system.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

6- Is it possible to assign the eigenvalues of following system on arbitrarily places (Final 1391)?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] x$$