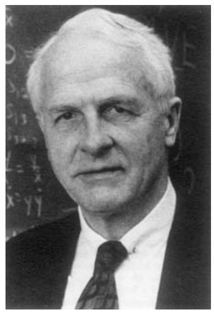
تعامد بیرخوف–جیمز در فضاهای نرمدار

فاطمه عبدالله‌زاده گنابادی
محمد صال مصلحیان

چکیده. در این مقاله ضمن اشاره به بعضی ملاحظات تاریخی، به بیان چگونگی گسترش رابطه تعامد دو بردار از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرمدار می‌پردازیم. در این رابطه تعامد بیرخوف–جیمز و انواع دیگر تعامد را معرفی کرده و خواص آن‌ها را در ارتباط با هندسه فضاهای نرمدار بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

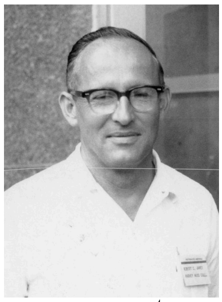
همزمان با پیدایش ضرب داخلی، مفهوم تعامد با الهام از عمود بودن دو خط در صفحه اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$، به عنوان رابطه‌ای بین بردارهای یک فضای ضرب داخلی تعریف شد. مطالعه روی این رابطه منجر به معرفی شرایط معادل برای تعامد دو بردار در یک فضای ضرب داخلی گردید. برخی از این شرایط معادل، تنها بر حسب نرم بیان می‌شوند و در نتیجه می‌توان آن‌ها را به عنوان تعریفی از تعامد در فضاهای نرمدار (که الزاماً فضای ضرب داخلی نیستند) درنظر گرفت. بیرخوف در سال ۱۹۳۵ در مقاله‌ای اشاره‌ای مختصر به این موضوع داشت.



گرت بیرخوف[۱] فرزند جرج دیوید بیرخوف تحصیلات دانشگاهی خود را در هاروارد به سال ۱۹۲۸ آغاز کرد. سپس به قصد تغییر رشته از ریاضیات به فیزیک ریاضی، به کمبریج رفت اما نهایتاً جبر مجرد را انتخاب کرد و شاگرد فیلیپ هال[۲] شد. بیش‌ترین مقالات بیرخوف در دهه ۱۹۳۰ به چاپ رسیده است. وی به همراه هم‌دانشگاهی خود، مک لین[۳] کتاب‌ها و مقالات بسیاری در حوزه‌های مختلف جبر مجرد به چاپ رساند ،از جمله مقاله‌ای با عنوان «درباره ساختار جبرهای مجرد» که در سال ۱۹۳۵ منتشر شد و باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات به نام **جبرهای جهانی**[۴] گردید. بیرخوف در طول جنگ جهانی دوم به شاخه، به قول خودش، «ریاضیات مهندسی» جذب شد و روی تعیین هدف‌ها توسط رادارها، محاسبات و مهندسی اسلحه‌ها و تانک‌ها برای پرتاب گلوله و... پژوهش‌هایی انجام داد. وی همچنین دوستی نزدیکی با جان فون نویمن[۵] داشت و تحقیقات مشترکی نیز با او در زمینه علوم رایانه‌ای انجام داد.

[۱] Garret Birkhoff
[۲] Philip Hall
[۳] Saunders Mac Lane
[۴] Universal algebras
[۵] John von Neumann

اما مطالعات اصلی و جامع روی مفهوم تعامد در فضاهای نرمدار، حدود ده سال بعد توسط جیمز انجام گرفت.



روبرت جیمز[۶] که عضو هیأت هفت نفره مؤسسین دانشگاه «هاروی مود[۷]» ایالت کالیفرنیا بود، در سال ۱۹۴۶ مدرک دکترای خود را در موضوع «تعامد در فضاهای نرمدار» از مؤسسه فناوری کالیفرنیا دریافت کرد. او در بین مؤسسان دانشگاه هاروی مود اولین پروفسور ریاضیات بود. به همین سبب این دانشگاه هر ساله به دو نفر از دانشجویان برگزیده رشته ریاضیات «جایزه روبرت جیمز» را اهدا می‌کند. شهرت جیمز بیش‌تر به واسطه تحقیقات او در حوزه فضاهای باناخ و معرفی فضای جیمز و کاربرد آن‌ها در ارائه مثال‌های نقض است. همچنین «قضیه جیمز» که بیان می‌کند: « فضای باناخ $\mathcal{X}$ بازتابی[۸] است اگر و تنها اگر هر تابعک خطی روی $\mathcal{X}$ نرم خود را در نقطه‌ای از گوی واحد $\mathcal{X}$ اختیار کند». به‌طور ویژه در اثبات قضایای مربوط به تعامد بیرخوف–جیمز بارها به‌کار برده شده است.

اکنون به ارائه تعریف تعامد در فضاهای نرمدار می‌پردازیم. ابتدا چند تعریف مقدماتی را که مورد نیاز است بیان می‌کنیم. در این تعاریف همواره $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ درنظر گرفته می‌شود که در آن $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط است.

یک نرم روی $\mathcal{X}$ عبارت است از یک تابع $\|.\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ به طوری که برای هر $x, y \in \mathcal{X}$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ب) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

پ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

نکته ۱. برای هر $x \in \mathcal{X}$ داریم $\|x\| \geq 0$ زیرا

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|.$$

[۶] Robert C. James
[۷] Harvey Mudd
[۸] reflexive

در این صورت دوتایی $(\mathcal{X}, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار می‌گوییم. در واقع می‌توان نرم را به نوعی فاصله هر نقطه از فضای برداری $\mathcal{X}$ تا مبدأ تلقی کرد.

مثال ۱. هر یک از موارد زیر یک فضای نرمدار است:

(۱) فضای برداری $\mathbb{R}^2$ همراه با

i. نرم اقلیدسی $\|(x_1, x_2)\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$.

ii. نرم ماکزیمم $\|(x_1, x_2)\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

iii. نرم p–شتن[۹] $\|(x_1, x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$.

(۲) فضای $C([0, 1])$ متشکل از همه توابع پیوسته از بازه $[0, 1]$ بتوی $\mathbb{C}$ همراه با اعمال نقطه‌وار جمع و ضرب اسکالر و با نرم سوپریمم

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

(۳) فضای l^p $(p \geq 1)$ متشکل از همه دنباله‌های مختلط مقدار $x = \{x_n\}$ به طوری‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ همگراست، همراه با اعمال معمولی جمع و ضرب اسکالر دنباله‌ها و با نرم p–شتن

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

اگر $(\mathcal{X}, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد، می‌توان بررسی کرد که $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی $\mathcal{X}$ به دست می‌دهد. اگر $\mathcal{X}$ با این متر کامل[۱۰] باشد $(\mathcal{X}, \|.\|)$ را یک فضای باناخ می‌گوییم. به سادگی می‌توان دید که فضای چندجمله‌ای‌ها با مقادیر متغیر در بازه $[0, 1]$، همراه اعمال جمع چندجمله‌ای‌ها و ضرب یک عدد در یک چندجمله‌ای، زیرفضای $C([0, 1])$ است که تحت نرم سوپریمم کامل نیست.

---

[۹] p-Schatten

[۱۰] دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک $(\mathcal{X}, d)$، کشی گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $n, m \geq n_0$ آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. به سادگی می‌توان دید که هر دنباله همگرا، کشی است اما عکس آن برقرار نیست. به عنوان مثال دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در فضای $(0, 1]$ با متر اقلیدسی، کشی است اما همگرا نیست. فضای متریکی را که در آن هر دنباله کشی، همگرا باشد، کامل می‌گویند.

باید توجه نمود که هر فضای برداری که فضای متریک نیز باشد، الزاماً نرم‌پذیر نیست، یعنی متر آن از روی یک نرم به روش بالا به دست نمی‌آید. به عنوان مثال، متر گسسته $d(x,y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ ۰ & x = y \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ نرم‌پذیر نیست زیرا خاصیت دوم نرم را نمی‌تواند دارا باشد.

یک ضرب داخلی روی $\mathcal{X}$ عبارت است از یک تابع $\langle .,. \rangle : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$ به طوری که برای هر $x, y, z \in \mathcal{X}$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\langle x, x \rangle \geq ۰$ و $x = ۰ \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = ۰$.

ب) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

پ) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

ت) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

در این صورت دوتایی $(\mathcal{X}, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌گوییم. به کمک نامساوی کشی–شوارتز $| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|$، می‌توان نشان داد که

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{۱}{۲}} \quad (*)$$

یک نرم روی $\mathcal{X}$ به دست می‌دهد. اگر $\mathcal{X}$ با این نرم، باناخ باشد، آن را یک فضای هیلبرت می‌گوییم. فضای برداری $l^۲$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{i=۱}^{\infty} x_n \bar{y_n}$$

مثالی از یک فضای هیلبرت است اما فضای $C([۰, ۱])$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_۰^۱ f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

یک فضای ضرب داخلی است که نرم حاصل از آن کامل نیست.

جردن[۱۱] و فون نویمن ثابت کردند که در فضای ضرب داخلی $\mathcal{X}$، برای هر $x, y \in \mathcal{X}$ رابطه

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲$$

برقرار است و آن را قانون متوازی‌الاضلاع نامیدند. این تساوی از آن جهت تساوی متوازی‌الاضلاع نامیده شده است که اگر متوازی‌الاضلاعی در صفحه اقلیدسی در نظر بگیریم و یک ضلع آن را بردار x و ضلع مجاور آن را y بنامیم آن‌گاه قطرهای متوازی‌الاضلاع همان بردارهای $x+y$ و $x-y$ خواهند بود و رابطه فوق بیانگر رابطه بین طول قطرهای این متوازی‌الاضلاع و طول ضلع‌های آن است. این تساوی نرمی از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا شرط لازم و کافی برای این است که نرم یک فضای نرمدار توسط یک ضرب داخلی با روشی که در (*) بیان شد، القا شود. توجه کنید که نرم سوپریمم فضای نرمدار $C([۰, ۱])$ نمی‌تواند از یک ضرب داخلی حاصل شود زیرا برای دو تابع $f(t) = t$ و $g(t) = ۱$ در $C([۰, ۱])$ داریم

$$\|f+g\|_\infty^۲ + \|f-g\|_\infty^۲ = ۵$$

اما $۲\|f\|_\infty^۲ + ۲\|g\|_\infty^۲ = ۴$. برای اطلاعات بیش‌تر در این حوزه به [۸] مراجعه نمایید.

در یک فضای ضرب داخلی، بردار x را عمود بر y گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = ۰$.

گزاره ۱. می‌توان نشان داد که در فضای ضرب داخلی $\mathcal{X}$ عبارت‌های زیر معادل هستند:

(i) $\langle x, y\rangle = ۰$.

(ii) $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$.

(iii) $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(iv) $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$.

اجازه دهید عبارت فوق را در $\mathbb{R}^۲$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید x و y دو بردار عمود در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ باشند. هر بردار در $\mathbb{R}^۲$ با پاره‌خطی جهت‌دار از مبدأ رسم می‌شود و می‌توان آن را با نقطه انتهایش یکی گرفت.

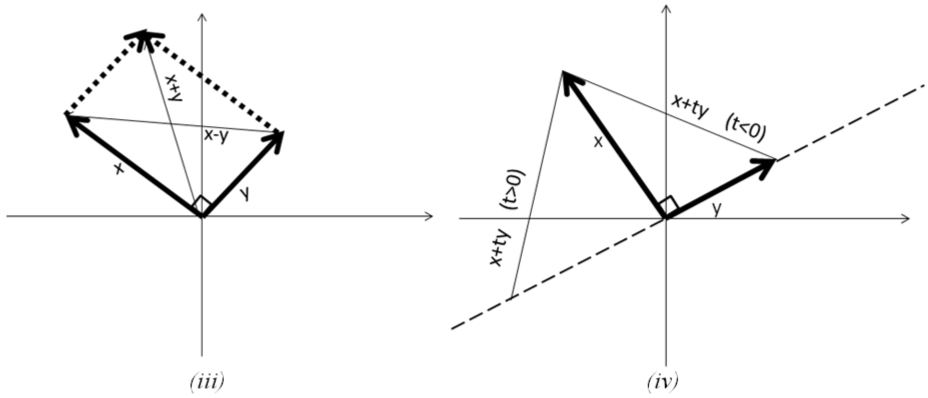
---

[۱۱] P. Jordan

قسمت (ii) بیان کننده رابطه فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که بردارهای x و y دو ساق آن و بردار $x+y$ وتر آن است. در واقع وقتی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^۲$ عمود هستند زاویه بین آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است و در نتیجه تشکیل دو ساق از یک مثلث قائم‌الزاویه را می‌دهند که بردار $x-y$ وتر آن است. بنابراین $\|x-y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$. اما از آن جا که بردار x بر بردار $-y$، یعنی برداری هم اندازه y و در جهت مخالفش، نیز عمود است، در فرمول فوق می‌توان $-y$ را با y جایگزین کرد که نتیجه همان رابطه (i) خواهد بود.

قسمت (iii) نیز بیانگر این است که طول بردارهای $x+y$ و $x-y$ باهم برابر است. در واقع، وقتی x و y بر هم عمود هستند، مستطیلی از رسم بردارهای x و y حاصل می‌شود که $x+y$ و $x-y$ قطرهای آن هستند و در نتیجه طول‌های برابر دارند.

قسمت (iv) به این معنا است که فاصله بردار x تا زیرفضای تولید شده توسط بردار y همواره ناکم‌تر از طول بردار x است. در $\mathbb{R}^۲$، زیرفضای تولید شده توسط بردار y، خط گذرنده از مبدأ و در راستای بردار y است. توصیف این رابطه در فضای $\mathbb{R}^۲$ به این صورت خواهد بود که کوتاه‌ترین فاصله نقطه انتهای بردار x تا خط تولید شده توسط y همان فاصله x تا صفر است. زیرا صفر، پای خط عمودی است که از نقطه انتهای x به خط متناظر بردار y رسم می‌شود و می‌دانیم که کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و نقاط یک خط، طول خط عمود از آن نقطه بر خط مفروض است.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود شرایط معادلی که برای تعامد به دست آمده است، تنها بر حسب نرم بیان شده‌اند. از این رو با استفاده از آن‌ها می‌توان تعامد را از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرمدار گسترش داد.

۲. انواع مهم تعامد در فضاهای نرمدار

گسترش تعریف تعامد از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرمدار، ابتدا توسط روبرتز[۱۲] در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. وی در مقاله خود تعریف زیر را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرمدار ارائه کرد

$$x \perp_r y \Leftrightarrow \|x-\gamma y\| = \|x+\gamma y\| \quad (\text{برای هر } \gamma \in \mathbb{R}). \qquad (۱)$$

پس از آن جیمز نشان داد که تعریف روبرتز مناسب نیست. جیمز ثابت کرد که اگر $\mathcal{X}$ فضای برداری متشکل از همه چندجمله‌های از درجه دو به شکل ax^2+bx با ضرایب

[۱۲] B. D. Roberts

حقیقی روی بازه $(۰, ۱)$ باشد، آن‌گاه شرط لازم برای تعامد دو بردار f, g به مفهوم (۱)، این است که حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد. وی سپس با الهام از ویژگی‌های هندسی تعامد دو بردار در فضای اقلیدسی، دو تعریف تعامد فیثاغورثی (رابطه (ii) در گزاره ۱) و تعامد متساوی‌الساقین (رابطه (iii) در گزاره ۱) را برای یک فضای نرمدار به معنایی که خواهیم دید، تعریف کرد.

تعریف: رابطه $\sim$ را روی یک مجموعه A

- متقارن گوییم هرگاه $x \sim y$ نتیجه دهد $y \sim x$،
- همگن گوییم هرگاه $x \sim y$ نتیجه دهد $\lambda x \sim \mu y$ برای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$،
- جمعی گوییم هرگاه $x \sim y$ و $y \sim z$ نتیجه دهد $x \sim y + z$.

جیمز نشان داد که تعامد متساوی‌الساقین روی یک فضای نرمدار $\mathcal{X}$، جمعی و یا همگن نیست مگر وقتی که $\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی باشد. همچنین حکم مشابهی را برای تعامد فیثاغورثی اثبات کرده و به تفصیل به مطالعه آن‌ها پرداخت.
جیمز سپس در [۴] و [۵] که مقالات مستخرج از رساله وی بودند رابطه زیر را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرمدار مطرح کرد:

$$x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{۲}$$

و به بررسی کلیه ویژگی‌های آن پرداخت.

در واقع قسمت (iv) از گزاره۱ همان مطلبی است که بیرخوف در [۱] به آن اشاره نمود. بیرخوف در ابتدای این مقاله تعریف خود را از تعامد این طور بیان کرد:
« دو بردار pq و pr در یک فضای ضرب داخلی $\mathcal{X}$ با بعد ناکم‌تر از ۳ برهم عمودند هرگاه طول بردار pr مینیمم فاصله r تا سایر نقاط پاره‌خط pq باشد.»
در واقع همین تعریف بود که این ایده را به جیمز داد تا تعامد را به صورت رابطه (۲) تعریف کند. در بعضی از مراجع این تعامد تنها به نام جیمز شناخته شده است چون هدف بیرخوف در مقاله خود کاملاً مستقل از این موضوع بود.

در این بخش هر یک از صورت‌های معادلی را که برای تعامد توسط جیمز در [۵] به دست آمده است، به عنوان نوعی از تعامد در فضاهای نرمدار تعریف می‌کنیم.

تعامد بیرخوف–جیمز: عنصر $x \in \mathcal{X}$ را به مفهوم بیرخوف–جیمز عمود بر $y \in \mathcal{X}$ گوییم و می نویسیم $x \perp_{BJ} y$، هرگاه

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

تعامد متساوی‌الساقین: گوییم x و y تعامد متساوی‌الساقین دارند و می‌نویسیم $x \perp_i y$ هرگاه

$$\|x + y\| = \|x - y\|.$$

تعامد فیثاغورثی: گوییم x و y به مفهوم فیثاغورثی بر هم عمود هستند و می‌نویسیم $x \perp_p y$ هرگاه

$$\|x + y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲.$$

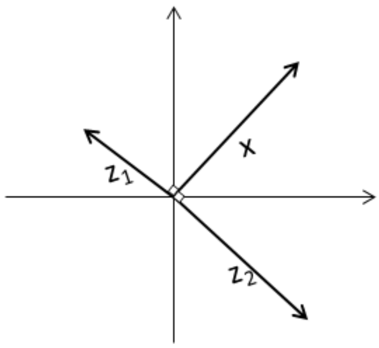
در یک فضای ضرب داخلی تمام تعامدهای معرفی شده، معادل با تعامد ضرب داخلی هستند (گزاره ۱ را ببینید). اما جالب است بدانید در فضاهای نرمدار، این تعامدها کاملاً مستقل بوده و هیچ‌کدام دیگری را نتیجه نمی‌دهند. مثال زیر این مطلب را روشن‌تر می‌کند.

مثال. فضای برداری $l^۱$ متشکل از دنباله‌های مختلط مقدار مطلقاً جمع‌پذیر را همراه با نرم $\|x\|_۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} |x(n)|$ در نظر بگیرید (این همان فضای l^p مثال ۱ است وقتی که $p = ۱$).

۱. فرض کنید $x = (۳, ۲, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۸, -۴, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_p y$ اما $x \not\perp_i y$ و $x \not\perp_{BJ} y$.
۲. فرض کنید $x = (۱, ۱, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۲, -۱, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_i y$ اما $x \not\perp_p y$ و $x \not\perp_{BJ} y$.
۳. فرض کنید $x = (۱, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۱, -۱, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_{BJ} y$ اما $x \not\perp_p y$ و $x \not\perp_i y$.

بنا به تعریف تعامد بیرخوف–جیمز، می‌توان به سادگی بررسی کرد که این رابطه همگن و جمعی است اما در حالت کلی متقارن نیست.

اولین حکمی که جیمز باید اثبات می‌کرد این بود که تعامد تعریف شده توسط او ضعف تعامد تعریف شده توسط روبرتز را در هندسه فضاهای نرمدار ندارد. به عبارت دیگر، در هر فضای نرمدار $\mathcal{X}$ و برای هر $x \in \mathcal{X}$ بردارهای غیر صفر $z_۱, z_۲ \in \mathcal{X}$ وجود دارند به طوری که $z_۱ \perp_{BJ} x$ و $x \perp_{BJ} z_۲$.



جیمز در [۴] با استفاده از قضیه هان–باناخ حکمی در این رابطه به صورت زیر به دست آورد.

برای هر دو بردار $x, y \in \mathcal{X}$ ***اعداد*** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ***وجود دارند به طوری که*** $x \perp_{BJ} \lambda x + y$ ***و*** $\mu x + y \perp_{BJ} x$. ***به‌علاوه، اگر*** $x \perp_{BJ} \alpha_۱ x + y$، $x \perp_{BJ} \alpha_۲ x + y$، $\beta_۱ x + y \perp_{BJ} x$ ***و*** $\beta_۲ x + y \perp_{BJ} x$***، آن‌گاه برای هر*** $\alpha_۱ \leq \lambda \leq \alpha_۲$ ***و هر*** $\beta_۱ \leq \mu \leq \beta_۲$ ***روابط*** $x \perp_{BJ} \lambda x + y$ ***و*** $\mu x + y \perp_{BJ} x$ ***برقرار است.***

حال که از وجود ضرایب λ, μ سخن به میان آوردیم، جالب است که بدانیم تحت چه شرایطی این ضرایب منحصر بفرد هستند. چون رابطه $\perp_{BJ}$ متقارن نیست، بنابراین تعریف‌های متفاوتی از یکتایی این اعداد می‌توان ارائه کرد.

تعریف. فرض کنید $x, y \in \mathcal{X}$ و $x \neq ۰$. در این صورت گوییم رابطه $\perp_{BJ}$،

الف) از راست منحصر بفرد است، اگر یک و تنها یک عدد $\lambda \in \mathbb{K}$ وجود داشته باشد که $x \perp_{BJ} \lambda x + y$.

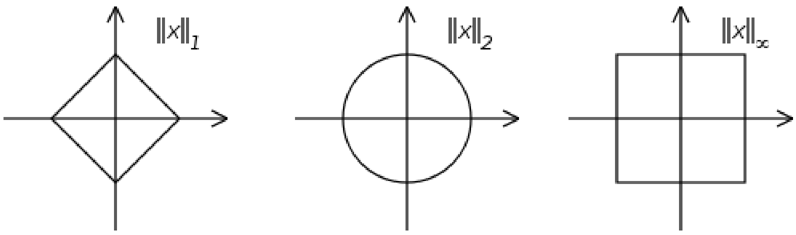
ب) از چپ منحصر بفرد است، اگر یک و تنها یک عدد $\mu \in \mathbb{K}$ وجود داشته باشد که $\mu x + y \perp_{BJ} x$.

شرایط یکتایی چپ و یکتایی راست رابطه $\perp_{BJ}$ بسیار متفاوت است و فقط در حالتی که تعامد بیرخوف–جیمز متقارن باشد، می‌توان آن‌ها را به هم ارتباط داد. همان طور که

در ادامه خواهید دید، یکتایی چپ به ساختار فضای برداری $\mathcal{X}$ بستگی دارد در حالی که یکتایی راست، به خواص رابطه $\perp_{BJ}$ وابسته است.
رابطه $\perp_{BJ}$ از راست منحصر بفرد است، اگر و تنها اگر این رابطه جمعی باشد. به عبارت دیگر، $x \perp_{BJ} y$ و $x \perp_{BJ} z$ نتیجه دهد که $x \perp_{BJ} (y+z)$. برای به دست آوردن حکمی در ارتباط با یکتایی چپ، به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۱. فضای نرمدار $\mathcal{X}$ را اکیداً محدب گوییم هرگاه برای هر دو نقطه x و y متعلق به مرز گوی واحد $\mathcal{X}$، خط گذرنده از x و y مرز این گوی را تنها در دو نقطه x و y قطع کند.

به عنوان مثال در شکل زیر گوی واحد $\mathbb{R}^۲$ همراه با سه نرم $\|.\|_۱$، $\|.\|_۲$ و $\|.\|_\infty$ نشان داده شده است که فقط $(\mathbb{R}^۲, \|.\|_۲)$ اکیداً محدب است.



می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای آن‌که رابطه $\perp_{BJ}$ روی فضای برداری $\mathcal{X}$، از چپ منحصر بفرد باشد، آن است که $\mathcal{X}$ اکیداً محدب باشد.

۳. زاویه و تعامد بیرخوف–جیمز

در مطالعه هندسه فضاهای ضرب داخلی، مفهوم زاویه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زاویه بین دو بردار در یک فضای ضرب داخلی $(\mathcal{X}, \langle .,. \rangle)$ به عنوان تابع دومتغیره $A : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $A(x,y) = \arccos \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$ تعریف می‌شود. تابع زاویه‌ای A دارای خواص زیر است:

- توازی: $A(x,y) = ۰$ اگر و تنها اگر x, y در یک جهت باشند و $A(x,y) = \pi$ اگر و تنها اگر x, y در جهت های مخالف باشند.
- تقارن: $A(x,y) = A(y,x)$.

- همگن بودن: $A(sx,ty)=\begin{cases} A(x,y) & st>0; \\ \pi-A(x,y) & st<0. \end{cases}$.
- پیوستگی: اگر $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ و $\lim_{n\to\infty} y_n=y$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n,y_n)=A(x,y).$$

همگام با توسیع‌های مختلف مفهوم تعامد از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرمدار، توابع زاویه‌ای جدیدی با ضابطه‌های مختلف متناسب با این تعامدها تعریف شده‌اند. به عنوان مثال در $\mathbb{R}^2$ اگر زاویه شناخته شده بین دو بردار $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ را که به صورت $\arctan\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}$ تعریف می‌شود در نظر بگیرید، آن‌گاه تعامد فیثاغورثی دو بردار معادل با این است که زاویه بین آن‌ها برابر با $\frac{\pi}{2}$ شود. هدف این بخش این است که با استفاده از توابع تصویر، تابعی زاویه‌ای مانند A_q تعریف کنیم به طوری که

$$x\perp_{BJ} y \Leftrightarrow A_q(x,y)=\frac{\pi}{2},$$

به عبارت دیگر تعامد بیرخوف–جیمز دو بردار معادل با این شود که زاویه بین آن‌ها به این مفهوم برابر با $\frac{\pi}{2}$ شود. از آن‌جا که انتظار داریم زاویه بین دو بردار در فضای نرمدار $\mathcal{X}$ با زاویه بین آن‌ها در زیرفضای تولید شده توسط آن دو بردار با هم برابر باشد، مطالعه خود را روی فضای برداری دو بعدی، متمرکز می‌کنیم.

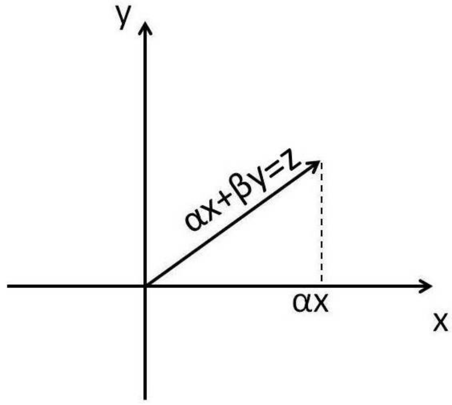
۱.۳. ساختار زاویه. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای برداری با پایه $\{e_1,e_2\}$ باشد و $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ نمایش دو بردار مستقل خطی در $\mathcal{X}$ بر حسب این پایه باشد. قرار دهید:

$$D_{xy}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}.$$

در این صورت $|D_{xy}|=y_2x_1-y_1x_2\neq 0$ زیرا x,y مستقل خطی هستند. برای هر $z\in\mathcal{X}$ اسکالرهای منحصر بفرد $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که $z=\alpha x+\beta y$. بنابراین تابع تصویر P_{xy} که در راستای بردار y به توی فضای تولید شده توسط x، با

ضابطه زیر داده می‌شود، خوش‌تعریف خواهد بود:

$$P_{xy} : \mathcal{X} \longrightarrow \{tx;\ t \in \mathbb{R}\}$$
$$z = \alpha x + \beta y \longmapsto \alpha x$$



می‌توان نشان داد که P_{xy} تنها به بردارهای x, y وابسته است. اگر نمایش آن را بر حسب پایه $\{e_۱, e_۲\}$ محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$P_{xy} = \frac{۱}{|D_{xy}|} \begin{bmatrix} x_۱ y_۲ & -x_۱ y_۱ \\ x_۲ y_۲ & -x_۲ y_۱ \end{bmatrix}.$$

اکنون ابزار کافی را برای تعریف q–زاویه در اختیار داریم.

برای هر دو بردار $x, y \in \mathcal{X}$ قرار می دهیم:

$$q(x,y) = \begin{cases} ۰ & \text{وقتی } x, y \text{ وابسته خطی‌اند} \\ \|P_{xy}\|^{-۱} & \text{وقتی } x, y \text{ مستقل خطی‌اند} \end{cases}$$

q–زاویه بین دو بردار را با $A_q(x,y)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A_q(x,y) = \arcsin(q(x,y)).$$

در این صورت اگر $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$ دو بردار در $\mathcal{X}$ با پایه $\{e_۱, e_۲\}$ باشند، آن‌گاه

$$x \perp_{BJ} y \Leftrightarrow A_q(x,y) = \frac{\pi}{۲}.$$

برای اطلاعات بیش‌تر در مورد تابع زاویه‌ای فوق و خواص آن، به [۱۰] مراجعه کنید.

۴. کاربردهای تعامد بیرخوف–جیمز

۱.۴. تساوی مثلث. یکی از شرایطی که برای نرمدار بودن یک فضای برداری مانند $\mathcal{X}$ لازم است این است که تابع نرم در نامساوی مثلث، یعنی در عبارت $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in \mathcal{X}$ صدق کند. مطالعات بسیاری روی این رابطه، معکوس آن و شرایطی که تحت آن‌ها این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود، انجام گرفته است (ر. ک. [۳]). در این جا با استفاده از تعامد بیرخوف–جیمز، یک شرط معادل برای تساوی مثلث در یک فضای نرمدار بیان می‌کنیم:

قضیه. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد و $x, y \in \mathcal{X}$. در این صورت عبارت های زیر معادلند:

(i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

(ii) $y \perp_{BJ} (\|x\|y - \|y\|x)$

(iii) $x \perp_{BJ} (\|x\|y - \|y\|x)$

۲.۴. مشخصه سازی فضاهای ضرب داخلی. تاکنون شرایط متعددی معرفی شده‌اند که تحت هر یک از آن‌ها نرم یک فضای نرمدار مانند $\mathcal{X}$ از یک ضرب داخلی به‌دست می‌آید. شناخته شده ترین این شرایط، قانون متوازی‌الاضلاع است. مشخصه‌های دیگری نیز به‌دست آمده است که به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم،

(i) $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۴$ برای هر $x, y \in \mathcal{X}$ که $\|x\| = \|y\| = ۱$.

(ii) اگر $\|x+y\| = \|x-y\|$ آن‌گاه $\|x+ky\| = \|x-ky\|$ برای هر $k \in \mathbb{R}$.

(iii) اگر $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$ آن‌گاه $\|x+ky\|^۲ = \|x\|^۲ + \|ky\|^۲$ برای هر $k \in \mathbb{R}$ [۲].

کاپور در [۶] ثابت کرده است که شرط لازم و کافی برای این که فضای نرمدار $\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی باشد این است که یکی از تعامدهای معرفی شده دیگری را نتیجه دهند. به بیان دیگر، برای یک فضای نرمدار $\mathcal{X}$ گزاره‌های زیر معادل هستند:

i. ***$\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی است.***

ii. ***برای هر $x, y \in \mathcal{X}$ اگر $x \perp_p y$ آن‌گاه $x \perp_i y$.***

iii. ***برای هر*** $x, y \in \mathcal{X}$ ***اگر*** $x \perp_i y$ ***آن‌گاه*** $x \perp_p y$.

iv. ***برای هر*** $x, y \in \mathcal{X}$ ***اگر*** $x \perp_p y$ ***آن‌گاه*** $x \perp_{BJ} y$.

v. ***برای هر*** $x, y \in \mathcal{X}$ ***اگر*** $x \perp_{BJ} y$ ***آن‌گاه*** $x \perp_p y$.

vi. ***برای هر*** $x, y \in \mathcal{X}$ ***اگر*** $x \perp_i y$ ***آن‌گاه*** $x \perp_{BJ} y$.

vii. ***برای هر*** $x, y \in \mathcal{X}$ ***اگر*** $x \perp_{BJ} y$ ***آن‌گاه*** $x \perp_i y$.

همان طور که ملاحظه می‌کنید هرگونه ارتباطی بین این تعامدها منجر به این می‌شود که $\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی باشد.

۳.۴. بهترین تقریب. یکی دیگر از کاربردهای تعامد بیرخوف–جیمز که در [۹] به آن پرداخته شده است، نظریه بهترین تقریب و وجود آن در فضاهای نرمدار و ارتباط آن به مشخصه‌سازی یک فضای ضرب داخلی می‌باشد. قبل از بیان جزئیات بیش‌تر به تعاریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار، $\mathcal{Y}$ زیرفضایی از آن و $x_\circ$ برداری خارج از $\mathcal{Y}$ باشد. بردار $y_\circ \in \mathcal{Y}$ را بهترین تقریب برای $x_\circ$ در $\mathcal{Y}$ می‌گوییم هرگاه برای هر $y \in \mathcal{Y}$، $\|x_\circ - y_\circ\| \leq \|x_\circ - y\|$. همچنین $w_\circ \in \mathcal{Y}$ را بهترین هم–تقریب $x_\circ$ در $\mathcal{Y}$ گوییم هرگاه برای هر $y \in \mathcal{Y}$، $\|w_\circ - y\| \leq \|x_\circ - y\|$.

مجموعه $S = \{x_۱, \dots, x_n\}$ را به مفهوم بیرخوف–جیمز نسبت به عنصر $x_{i_\circ} \in S$ متعامد گوییم هرگاه $\|x_{i_\circ}\| \leq \left\|x_{i_\circ} + \sum_{j \neq i_\circ, j=۱}^{n} \lambda_j x_j\right\|$ که در آن λ_jها همزمان صفر نیستند.

اگر برای هر $i \in \{۱, \dots, n\}$ مجموعه S به مفهوم بیرخوف–جیمز نسبت به x_i متعامد باشد می‌گوییم S یک مجموعه متعامد به مفهوم بیرخوف–جیمز است.

در [۹] ثابت شده است که اگر $\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی اکیداً محدب هموار با بعد ناکم‌تر از ۳ باشد، آن‌گاه برای هر زیرفضای $\mathcal{Y}$ و هر بردار خارج از $\mathcal{Y}$ مانند $x_\circ$ بهترین تقریب و بهترین هم–تقریب $x_\circ$ در $\mathcal{Y}$ باهم برابر هستند و در نهایت مشخصه‌ای

به صورت زیر برای فضاهای ضرب داخلی بیان می‌شود:

«فضای نرمدار اکیداً محدب هموار با بعد متناهی $\mathcal{X}$ یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر بردار $x_\circ$ در گوی واحد $\mathcal{X}$ یک پایه متعامد به مفهوم بیرخوف–جیمز شامل $x_\circ$ برای $\mathcal{X}$ وجود داشته باشد» (برای جزئیات بیش‌تر [۹] را ببینید).

سؤال: به عنوان یک مسأله جالب می‌توان پرسید که اگر یک تبدیل خطی، یعنی یک نگاشت حافظ اعمال جمع و ضرب اسکالر، بین دو فضای نرمدار داشته باشیم، در چه صورت این نگاشت حافظ تعامد است، یعنی اگر دو بردار در دامنه تابع برهم عمود باشند تحت چه شرایطی تصویرهای آن دو نیز برهم عمود خواهد بود؟ (ر. ک. [۷])

مراجع

1. G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke. Math. J.* 1 (1935) 169–172.
2. F. Dadipour and M.S. Moslehian, A characterization of inner product spaces related to the p-angular distance, *J. Math. Anal. Appl.* 371 (2010), no. 2, 677-681.
3. F. Dadipour, M.S. Moslehian, J.M. Rassias and S.-E. Takahasi, Characterization of a generalized triangle inequality in normed spaces, *Nonlinear Anal-TMA* 75 (2012), no. 2, 735-741.
4. R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 61 (1947) 265–292.
5. R. C. James, Orthogonality in normed linear spaces, *Duke. Math. J.* 12 (1945) 291–302.
6. O. P. Kapoor, J. Prasad, Orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* 19 (1978) 403–416.
7. M.S. Moslehian and A. Zamani, Exact and approximate operator parallelism, *Canad. Math. Bull.* 58 (2015), no. 1, 207–224.
8. M.S. Moslehian and J.M. Rassias, A characterization of inner product spaces concerning an Euler-Lagrange identity, *Commun. Math. Anal.* 8 (2010), no. 2, 16-21.
9. D. Sain, K. Paul, L. Debnath, Characterization of Inner Product Spaces, *Int. J. Appl. Comput. Math.* (2015), DOI: 10.1007/s40819-015-0036-8.
10. Ch. Zh. Zhi, L. Wei, L. Lü-Lin, Projections, Birkhoff-orthogonality and angles in normed spaces, *Commu. Math. Res.* 24 (2011) no. 4, 378–384.