

ریاضیاتِ افلاطونی

محمد صالح مصلحیان

<http://www.um.ac.ir/moslehian>

چکیده

این مقاله به نظریه افلاطون درباره ریاضیات، رابطه میان مثل و اشیای ریاضی، افلاطون گرایی در ریاضیات و نظر افلاطون درباره این که "جهان از چه ساخته شده است" می پردازد.

مفهوم دنیای مثل

افلاطون، فیلسوف قدیمی یونان، ۴۲۷ سال قبل از میلاد در یک خانواده سرشناس آتنی دیده به جهان گشود. در ایام جوانی شور سیاست در سرداشت؛ اما به زودی به واسطه برخورد با حکومتی که استادش سقراط را به قتل رساند سرخورده شد. افلاطون آکادمی خود را در ۳۸۴ قبل از میلاد بنیاد گذارد. تحت رهبری و هدایت او این مؤسسه آتنی به مرکزی برای پژوهش در ریاضیات، علوم و سیاست مبدل شد. سهم افلاطون در این پژوهشها ارائه گفتگوها و محاوراتی بود که به تمام قلمرو دانش بشری مربوط می شد. وی حدود سال ۳۴۷ قبل از میلاد دارفانی را وداع گفت.

سقراط معتقد به عقل فطری بود که فرد با سود جستن از آن و به کمک عقل با راه یابی به درون خویشتن می توانست به واقعیت مکنون در محسوسات پی ببرد. اما افلاطون معتقد بود که واقعیت باید چیزی دریک جهان ایده آلی باشد، نه لزوماً درخود اشیاء؛ و به همین خاطر به زعم وی فلسفه از تلاش برای ارتقاء از علم پدیده ها یا نمودها، به جوهره یا واقعیتها تشکیل شده است.

افلاطون، جهان را به دو قسمت متمایز تقسیم می کرد. اول جهان محسوسات که چون با حواس ناقص ما شناسایی می شود، جزئی و تقریبی است؛ جهانی که در آن همه چیز می آیند و می روند، اما هیچ وقت واقعاً وجود ندارند. دوم جهانی قابل فهم و معقول که عالم مثال نامیده می شود. برای افلاطون مثال یا صورت، واقعیت غایی غیر قابل تغییر، مستقل از ذهن و کاملاً مجردی تلقی می شد که فقط قابل درک با عقل است نه با قوای حسی. به علاوه هر چیزی در دنیای قابل مشاهده، فقط نسخه ای ناقص و انعکاس یا تقریبی از یک حقیقت اصلی (مثال) است. نمونه های زیادی از مثل می توان یافت، مثلاً اسبها موجودیت خود را از "اسب" می گیرند و ما آنها را به عنوان اسبها تلقی می کنیم، زیرا آنها در صورت "اسب" موجود هستند.

افلاطون، متأثر از سقراط، معتقد بود قبل از آن که متولد شویم ارواح ما در عالم مثال زندگی می کنند و سپس این ارواح همراه با مفاهیم مثل متولد می شوند و ما آنچه را که روحمان در دنیای مثل آموخته است، به یاد می آوریم؛ و این تعلیمات و اصول نوعی یاد آوری است. بهمین دلیل افلاطون به عنوان یکی از اولین عقلیون شناخته شد. وی آموزه های فیثاغورس را درایتالیا مطالعه نمود و عمیقاً تحت تاثیر آنها قرار گرفت و به ریاضیات فیثاغورسی تمایل پیدا کرد. به ویژه به نظریه اعداد علاقمند شد چنان که مثال (صورت) را برحسب هارمونی عددی در تیمائوس تعبیر کرد. وی آموزش داد که هر چیزی در جهان فیزیکی از مثلثها به جای اعداد (بر خلاف آنچه فیثا غورسیان عقیده داشتند) ساخته شده است.

افلاطون کشف مهمی در ریاضیات نداشته است، گرچه اعتقاد او در باره این که "ریاضیات بهترین تمرین برای ذهن است" مهم می باشد. همچنین سهم افلاطون در گسترش فلسفه ریاضیات - هر چند بیشتر مربوط به واقع گرایی هستی شناختی است - بیان این مطلب است که اشیاء ریاضی مستقل از ذهن بشر موجودیت دارند.

افلاطون معتقد بود که ۲ سیب، تخمینی از مثال "۲" است و همچنین یک صفحه گرد تصوری از مثال "گرد بودن" است. ارتباط بین ریاضیات محض و کاربردی، همچون ارتباط بین $2+2=4$ و "۲ سیب و ۲ سیب می شود ۴ سیب" مانند ارتباط بین مثل و نمودها است. بعلاوه تمامی قضایای ریاضی مانند $2+2=4$ لزوماً درست می باشند زیرا به موجودات ثابت مربوط می شوند و روابط تغیرناپذیر بین آنها را بیان می کنند و از انسان و زبانی که این قضایا با آن بیان می شوند مستقل می باشند.

ارسطو، شاگرد افلاطون، تمایزی را که افلاطون بین دنیای ظواهر و دنیای مثل قائل شده بود، رد نمود. آموزه او این بود که مثال اسب در حقیقت عبارت خلاصه ای از چیزی است که اسب را می سازد و این مثال، حقیقت معنایی خود را از "اسب ها" می گیرد. وی همچنین ادعا کرد که یک شی ریاضی مانند یک مربع هندسی، جنبه با معنا از یک شی مادی از قبیل یک تکه آجر مربع شکل است که می تواند فقط با نادیده گرفتن جنبه های بی ربطی همچون مواد سازنده آجر درک گردد. [7]

افلاطون گرایی، مکتبی در فلسفه ریاضیات

افلاطون گرایی مکتبی در ریاضیات است که در راستای عقاید افلاطون راجع به مثل است. افلاطونیان اعتقاد دارند که اشیاء ریاضی از قبیل اعداد، خطوط، مکعب چهار بعدی، فضاهای هیلبرت مانند مثل هستند، موجوداتی غیر فیزیکی با خصوصیات ثابت و مشخص، مجرد و مستقل از هر نوع آگاهی، و به خصوص آگاهی ریاضی ما. به عنوان مثال، حدس "اعداد اول دو قلو" که می گوید

"تعداد نامتناهی جفت دوقلو (یعنی دو عدد اول با اختلاف ۲) وجود دارد" ارزش درستی معینی دارد، صرف نظر از اطلاعات ما راجع به این که آیا این حدس تاکنون اثبات یا ابطال شده است. هیچ تاثیر و ارتباط متقابلی نمی تواند بین اشیاء ریاضی و حواس ما باشد، بشر آنها را اختراع نمی کند بلکه آنها را کشف می نماید و لذا یک ریاضیدان، به مثابه یک دانشمند تجربی است. راسل در یکی از اولین دست نوشته های خود آورده است: «حساب باید همانطور کشف شده باشد که کریستف کلمب هند غربی [امریکا] را کشف کرد. ما اعداد را نیافریده ایم همچنان که کلمب "هندیان" را نیافرید.» [۲]

جماعتی از ریاضیدانان مانند پال اردش، کورت گودل، رنه تام، ویلارد کواین، هیلاری پاتنام و پنلوپ مدی، افلاطونی می باشند. افلاطون گرایی کلاسیک گاهی واقعگرایی خام خوانده می شود. در عین حال چندین قرائت دیگر از افلاطون گرایی (واقعگرایی) وجود دارد:

در شکلی از افلاطون گرایی به نام افلاطون گرایی نظریه مجموعه ای گودل، مجموعه های نامتناهی که همواره در برابر تجارب متناهی بشری وجودشان و نحوه دست یابی به آنها مورد سؤال بوده است، واقعیتی غیر فیزیکی و صرفاً "ریاضی دارند. در این دیدگاه وجود مفاهیم و اصولی که بر مبنای شهود ریاضی ما توجیه می شوند یا در ارائه نتایج تصدیق پذیر و به دست دادن نتایج جدید کارایی دارند پذیرفته می شود. گودل می گوید: « من دلیلی نمی بینم که چرا باید به این گونه ادراک، یعنی به شهود ریاضی، کمتر از ادراک حسی عقیده داشته باشیم، آن شهودی که ما را وادار می کند تا نظریه های فیزیکی را بنا کنیم و انتظار داشته باشیم که ادراکات حسی آتی با آن سازگاری نشان دهد، و به علاوه باور داشته باشیم سؤالی که اکنون نمی توان به آن پاسخ داد، ممکن است بتوان در آتی برای آن پاسخی یافت.» [۱]

قرائتی دیگر، واقع گرایی علمی کواین-پاتنام است که می گوید آن اشیاء ریاضی وجود دارند که برای بهترین نظریه ما در مورد جهان اجتناب ناپذیر هستند، به همان صورت که مثلاً وجود الکترون در فیزیک پذیرفته شده است. به عبارت دیگر اگر ما بخواهیم به واقعیت پدیده ها که توسط علم توصیف می شود معتقد باشیم، باید به وجود آن اشیاء ریاضی مانند مجموعه ها، اعداد، توابع و . . . که برای این توصیف لازمند نیز معتقد باشیم.

در صورت دیگری از افلاطون گرایی، مدی وجود فیزیکی برای مجموعه ها قائل می شود و اعتقاد دارد که اعیان ریاضی در فضا - زمان قرار داده شده اند. بر طبق نظر او، مجموعه متشکل از کتابهای یک قفسه کتاب در همان قلمرو زمانی و مکانی قرار دارد که خود کتابها در آنجا هستند. وی می گوید که مغز ما از لحاظ عصب شناختی

داراي نوعي مجموعه ياب است که ما را قادر به درک مجموعه ها مي کند ([۴] و [8]).

در قرائتی ديگر از افلاطون گرايي، ارائه شده توسط مارک بلاگور و موسوم به افلاطون گرايي افراطي، هر شيء رياضي که وجودش ممکن باشد، واقعاً وجود دارد و هر نظريه رياضي سازگار، بخشی از واقعيت رياضي را توصيف مي کند. [5]

دو مکتب فلسفي "مفهوم گرايي" و "نامگرايي" در مقابل افلاطون گرايي قرار دارند:

نامگرايي، وجود مفاهيم مجرد را انکار مي کند و از پذيرفتن اين که عقل، قدرت بوجود آوردن آنها را دارد، امتناع مي ورزد. نامگرايي ادعا مي کند که مفاهيم رياضي چه در داخل و چه در خارج از مغز ما نمي تواند وجود داشته باشد، در عوض اشیاء رياضي چیزی جز نام نيستند و صحبت از صدق جملات رياضي بي معني است؛ و مثلاً $2+2=4$ به همان اندازه راست است که "کاوه، ضحاک مار بدوش را کشت". نامگرايي وجود فيزيکي خواص اشيا و روابط بين آنها را تخيل مي پندارد و بر خلاف افلاطونيان، وجود اشيا قرمز را مي پذيرد اما وجود قرمزي را خير.

مفهوم گرايي وجود مفاهيم مجرد را در ذهن ما مي پذيرد اما عقیده دارد که ما نمي دانيم آیا اين اشیاء ذهني پايه و اساسي در دنياي بيروني دارند، يا خير. رياضيات براي مفهوم گرايان از عمل ناشي مي شود و بايد در نهايت يك ساختار ذهني به عنوان محصول عقل داشته باشد نه اين که تمريني در منطق و يا کشف مفهومي که از قبل وجود داشته است، باشد. با توجه به اين دیدگاه، قضايای رياضي درست هستند زيرا ما مي گوئيم که آنها درستند و رياضيدانان، رياضيات را کشف نمي کنند بلکه رياضياتي جديد اختراع مي کنند.

بايد توجه داشت که سه مکتب مهم در فلسفه رياضيات، يعني منطق گرايي، صورت گرايي و ساختار گرايي به ترتيب به واقع گرايي، نامگرايي و مفهوم گرايي مربوط مي شوند. منطق گرايي دیدگايي است که رياضيات را شاخه اي از منطق مي داند. صورت گرايي مکتي است که مي گويد، هر شاخه اي از رياضيات مي تواند به زبان صوري (يعني با مجموعه اي از نشانه هاي بي معني، همراه با قوانين واضح و دلخواه) به عنوان يك ساختار سازگار تام، اصل موضوعي گردد و به علاوه نقش تجربه را انکار مي کند. ساختارگرايي (شهودگرايي) دیدگايي است که در آن رياضيات چیزی است که طي يك فرآيند متناهي (استقرائي) از اعداد طبيعي (که صورت پيشيني مجردي از شهودمان هستند) بدون به کار بردن قانون طردشک وسط (که مي گويد هرگزاره اي يا راست يا دروغ است) حاصل مي شود. (ر. ک. [۳]، [6] و [9])

اينک مي خواهيم مسائل مهمي را که هر افلاطون گرا بايد تلاش کند تا به آنها پاسخ دهد بيان کنيم:

۱. اشیاء ریاضی در کجا وجود دارند؟
۲. چرا عالم مثل کاملاً از جهان فیزیکی ما مجزا است؟
۳. موجودات مادی و مفاهیم ریاضی چگونه با هم ارتباط متقابل دارند؟
۴. آیا با معنی است که بگوئیم فضاهای هیلبرت حتی در زمان افلاطون نیز وجود داشته اند؟
۵. افلاطون گراها کشف هندسه های نااقلیدسی را چگونه توضیح می دهند، درحالی که این هندسه ها با نظریه "حقیقت مطلق" آنها در تناقض است؟
۶. افلاطونیان تجربه گرایی علم را چگونه تبیین می کنند؟

هندسه، کلید فهم جهان برای افلاطون

ممکن است سؤال شود که جهان از چه ساخته شده است؟ افلاطون در رساله تیمائوس چگونگی خلق عالم را شرح داد. وی "خاک، هوا، آتش و آب" را عناصر سازنده عالم ذکر کرد و همچنین ذراتی که هر یک از این عناصر چهارگانه از آنها درست شده اند را به دست داد. به زعم او این ذرات اجسام هندسی منتظم زیر می باشند: هرم، مکعب، هشت وجهی و بیست وجهی (موسوم به اولین اجسام چهار گانه افلاطونی). وجوه این اجسام به ترتیب فقط از دو نوع مثلث قائم الزاویه مختلف ساخته شده اند (بر خلاف اتم های دموکریت که از انواع و اندازه های مختلف بودند). مثلث نوع اول، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است که از بریدن یک مربع در راستای قطر آن به دست آید. مثلث نوع دوم، مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع است که از نصف کردن مثلثهای متساوی الاضلاع حاصل می شود. افلاطون از این دو مثلث برای ساختن وجوه اجسام چهارگانه خود استفاده کرد. درحقیقت او اعتقاد داشت هر سطحی قابل تجزیه به مثلثهای متساوی الاضلاع است (یک عبارت نادرست جالب) که اهمیت هندسه را برای افلاطون نشان می دهد.

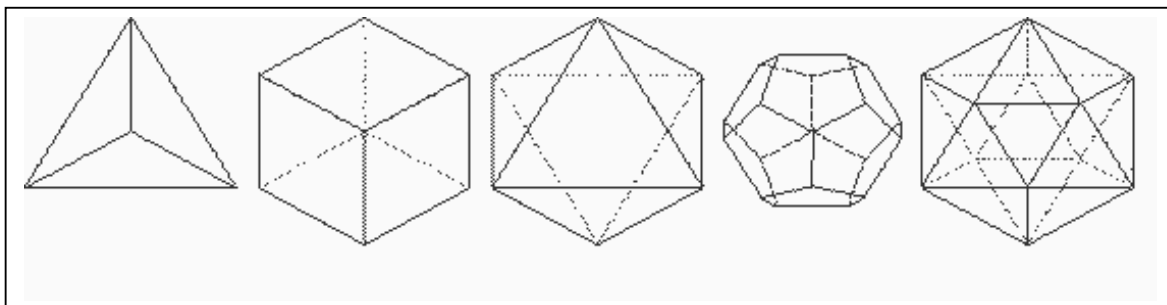
از دیدگاه افلاطون:

عنصر آتش، هرم منتظم است (زیرا در بین عناصر، آتش نافذترین آنهاست و در میان اجسام منتظم، هرم تیزترین گوشه ها را دارد) و از ۸ مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع ساخته شده است. عنصر هوا، هشت وجهی است و از ۱۶ مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع ساخته شده است.

عنصر خاک، شش وجهی است (زیرا خاک صلب ترین عناصر است و واژگون کردن مکعبی که بر قاعده قرار گرفته است مشکل تر از سایر اجسام منتظم است) و از ۱۲ مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ساخته شده است.

عنصر آب، بیست و جهی است و از ۴۰ مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع ساخته شده است.

جسم افلاطوني پنجم، ۱۲ وجهي است که از دیدگاه افلاطون مدی برای کل جهان هستی است، افلاطون در واقع جزئیات چگونگی ساخته شدن ۱۲ وجهی را توضیح نمی دهد. [10]



مراجع :

۱. گرینبرگ، ماروین. جی، هندسه های اقلیدسی و ناقلیدسی، ترجمه محمد هادی شفیعیها، نشر دانشگاهی، ۱۳۶۳.
۲. بارکر، استیفن، فلسفه ریاضی، ترجمه احمد بیرشک، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۹.
۳. براؤور، لوئیتزن، شهودگرایی و صورتگرایی، ترجمه محمد اردشیر، نشر ریاضی، سال ۹، شماره ۱، ۱۳۷۸.
۴. وحید حمید، گرایشهای موجود در فلسفه ریاضیات، نشر ریاضی، سال ۱۰، شماره ۲، ۱۳۷۸.

5. M. Balaguer, *Platonism and anti-platonism in Mathematics*, Oxford Univ. Press, 1998.

6. P. J. Davis and R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

7. S. Korner, *The Philosophy of Mathematics, an Introductory Essay*. New York: Dover, 1986.

8. P. Maddy, *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon, 1990.

9. M.S. Moslehian, *What is mathematics in modern and postmodern view?* To appear in *Gazeta Matematica* (Romanian Mathematical Society).

10. M.S. Moslehian, *Let no one unversed in geometry enter here*, *The Examined Life*, Vol. 3, No. 12, 2002.