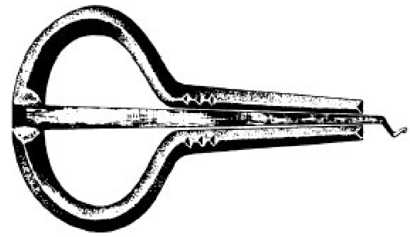
هم‌ساز با سری همساز!

محمد صال مصلحیان*



سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$ یکی از مهم ترین سری‌ها در ریاضیات است چراکه مثالی است از یک سری واگرا که جمله‌ی عمومی آن، $\frac{1}{n}$، به صفر همگراست. البته واگرا بودن آن بیش تر به خاطر وجود اعداد اول است، چراکه $\sum_p \frac{1}{p}$ (p عدد اول) واگراست. جمعک nام این سری یعنی $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ نزدیک به $\ln n$ و بنابراین سرعت واگرایی آن بسیار کند است؛ مثلاً باید $1/5 \times 10^{43}$ جمله‌ی آن را باهم جمع کرد تا به عدد ۱۰۰ نزدیک شد. یک نکته‌ی جالب این است که S_n فقط و فقط وقتی عدد صحیح است که $n = 1$. از طرف دیگر سری همساز متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست. یک سؤال طبیعی این است که بپرسیم در مورد سری همساز تصادفی $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{j}$ که در آن ε_j ها متغیرهای تصادفی مستقل با $P(\varepsilon_j = 1) = \frac{1}{2}$ و $P(\varepsilon_j = -1) = \frac{1}{2}$ هستند چه می توان گفت؟[1] علاقمندان ممکن است ثابت کنند که $\sum_{j>k>l\geq 1} \frac{1}{j^a k^b l^c}$ که در آن a، b و c اعداد صحیح معلوم ناکم‌تر از ۲ هستند همگراست[2]. جالب‌تر این که اگر در سری همساز جملاتی را که در مخرج آن ها یک رقم معین (مثلاً ۹) ظاهر شده است (مانند ۹، ۱۹، ۲۹ و ...) حذف کنیم، یک سری همگرا به دست می آید[3]:

$$\begin{aligned}\sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} &= (1 + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{88}) + \ldots + (\frac{1}{10^k} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{88\cdots8}_{k}}) + \ldots \\ &< (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{8\times 9^0}) + (\underbrace{\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10}}_{8\times 9^1}) + \ldots + (\underbrace{\frac{1}{10^k} + \ldots + \frac{1}{10^k}}_{8\times 9^k}) + \ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\text{۸} \times \text{۹}^{\circ} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{\circ}}) + (\text{۸} \times \text{۹}^{\text{۱}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{\text{۱}}}) + \ldots + (\text{۸} \times \text{۹}^{k} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}^{k}}) + \ldots \\
&= \text{۸} \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\frac{\text{۹}}{\text{۱۰}}\right)^{k} \\
&= \text{۸۰}.
\end{aligned}
$$

توجه نمایید که $\sum_{\text{۹} \in n} \frac{\text{۱}}{n} = \frac{\text{۱}}{\text{۹}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۹}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲۹}} + \ldots$ واگراست زیرا این سری بزرگ‌تر از سری واگرای $\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}k+\text{۹}}$ است[۴]. همچنین اگر Z_i مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی باشد که دقیقاً i صفر در نمایش اعشاری خود دارند و $t_i = \sum_{n \in Z_i} \frac{\text{۱}}{n}$، آن گاه بررسی خواص دنباله‌ی $\{t_i\}$ دلپذیر خواهد بود[۵]. یک مسأله‌ی چالش برانگیز، محاسبه‌ی کوچک ترین عدد صحیح n است که به ازای آن $A < S_n$ که در آن A یک مقدار داده شده است.

اثبات های متداول واگرایی سری همساز در کتاب های ریاضی عمومی معمولاً بر اساس یکی ازاین دو روش است:

الف) نامساوی $S_n = \sum_{k=\text{۱}}^{n} \frac{\text{۱}}{k} > \int_{\text{۱}}^{n+\text{۱}} \frac{dx}{x} = \ln(n+\text{۱})$.

ب) برهان نیکول ارسم (Nicole Orseme) در سال ۱۳۵۰ میلادی که در آن ثابت می شود $S_{\text{۲}^n} \geq \text{۱} + n(\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ و از آن نتیجه می شود دنباله‌ی $\{S_n\}$ که دارای یک زیردنباله‌ی بی کران $\{S_{\text{۲}^n}\}$ است، واگراست.

در ذیل به چند اثبات زیبای دیگر اشاره می کنیم و خواننده‌ی علاقمند را برای آشنایی با اثبات های دیگر واگرایی سری همساز به [۶,۷] ارجاع می دهیم.

- **اثبات اول** Honsberger. ۹ عدد یک رقمی وجود دارد که معکوس هر یک، از $\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}$ بیش تر است. پس $S_{\text{۹}} > \frac{\text{۹}}{\text{۱۰}}$. همچنین ۹۰ عدد دو رقمی وجود دارد که معکوس هر یک، از $\frac{\text{۱}}{\text{۱۰۰}}$ بیش تر است و لذا $S_{\text{۹۹}} > \frac{\text{۹}}{\text{۱۰}} + \frac{\text{۹۰}}{\text{۱۰۰}} = \text{۲}(\frac{\text{۹}}{\text{۱۰}})$. با استقرا می توان نشان داد که $S_{\text{۱۰}^k-\text{۱}} > k(\frac{\text{۹}}{\text{۱۰}})$. چون $\{S_{\text{۱۰}^k-\text{۱}}\}$ یک زیر دنباله‌ی بی کران از $\{S_n\}$ است پس $\{S_n\}$ واگراست.
- **اثبات دوم** Honsberger. بنا به بسط مک لورن، برای هر عدد حقیقی نامنفی x، $e^x > \text{۱} + x$ پس

$$e^{S_n} = e^{\text{۱}} e^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \ldots e^{\frac{\text{۱}}{n}} \geq (\text{۱}+\text{۱})(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}) \ldots (\text{۱}+\frac{\text{۱}}{n}) = n + \text{۱}$$

پس $\{e^{S_n}\}$ و در نتیجه $\{S_n\}$ واگراست.

- **اثبات** Gillman. اگر سری همساز همگرا به S باشد، آن گاه

$$\begin{aligned} S &= ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots \\ &= (۱+\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶})+\dots \\ &> (\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶})+\dots \\ &= S \end{aligned}$$

که ممکن نیست.

- **اثبات** Cohen-Kinght. اگر سری همساز همگرا به S باشد آن گاه

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲k}=\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}=\frac{۱}{۲}S$$

پس

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲k-۱}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}-\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲k}=S-\frac{۱}{۲}S=\frac{۱}{۲}S=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{۲k}$$

که ممکن نیست، زیرا برای هر k، $\frac{۱}{۲k}<\frac{۱}{۲k-۱}$.

- **اثبات** Oliver. مبتنی بر این قضیه است که اگر $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی مثبت و نزولی و $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\lim_n(na_n)=۰$.
- **آزمون مقایسه‌ی حدی.** چون $۱=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+\frac{۱}{n})}{\frac{۱}{n}}$ و سری تلسکوپی $\sum_{n=۱}^{\infty}(\ln(n+۱)-\ln n)$ واگراست، پس $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ نیز واگراست.
- **اثبات** Word. به وضوح $S_{۲n}-S_n=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۲n}>\frac{n}{۲n}=\frac{۱}{۲}$. اگر سری همساز همگرا می بود، آن گاه $۰=\lim_n S_{۲n}-\lim_n S_n=\lim_n(S_{۲n}-S_n)\geq\frac{۱}{۲}$ که متناقض با $۰<\frac{۱}{۲}$ است.
- **حسن ختام.**

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=۱+(\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{۶})+(\frac{۱}{۷}+\dots+\frac{۱}{۲۱})+(\frac{۱}{۲۲}+\dots+\frac{۱}{۶۶})+\dots>۱+۱+۱+۱+\dots$$

مراجع:

[1] B. Schmuland, Random harmonic series, Amer. Math. Monthly 110 (2003), no.5, 407-416.

[2] M.E. Hoffman and C. Moen, Sums of triple harmonic series, J. Number Theory 60 (1996), no.2, 329-331.

[3] G.H. Behforooz, Thinning out the harmonic series, Math. Magazine 68 (995), 289-293.

[4] R. Baillie, Sums of reciprocals of integers missing a given digit, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 372-374.

[5] A.D. Wahwa, Some convergent subseries of the harmonic series, Amer. Math. Monthly 85 (1978), no. 8, 661-663.

[6] S.J. Kifowit and T.A. Stamps, The harmonic series diverges again and again, The AMATYC review 27 (2006), 31-43.

[7] S.J. Kifowit, More proofs of divergence of the harmonic series, `Online: http://www.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/harm2.pdf`.

---

* گروه ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد