

دو دوست مکمل: ریاضی محض و ریاضی کاربردی

محمد صال مصلحیان

گروه ریاضی محض، دانشگاه فردوسی مشهد

ریاضیات محض مطالعه مفاهیم انتزاعی، مستقل از هر کاربردی در دنیای فیزیکی است، توصیفی که به دیدگاه متافیزیکی افلاطون¹ از ریاضیات به عنوان مطالعه مُثُل یا صورت‌های انتزاعی ابدی و تغییرناپذیر بر می‌گردد. هر چند بسیاری از این مفاهیم از دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرند، اما کاربردپذیری نتایج، دغدغه اصلی ریاضیدانان محض نیست. ریاضیات محض به دنبال اثبات صدق گزاره‌های ریاضی با معنی است. در واقع، ابداع یا کشف ساختارهای ریاضی زیبا، تعمیم و نیز حل مسائل مهم، انگیزه بخش ریاضیدانان محض برای عمق بخشیدن و گسترش ریاضیات است. موریس کلاین² می‌گوید: «ریاضیات عالی‌ترین دستاورد فکری و اصیل‌ترین ابداع ذهن آدمی است.»

هیچ کدام از مکاتب کلاسیک ریاضی، یعنی افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی، منطق‌گرایی و شهودگرایی، توضیح کاملاً قانع‌کننده و جامعی از اینکه چرا ساختارهای ذهنی دنیای واقعی را توصیف می‌کنند به دست نمی‌دهند؛ اما اخیراً ماکس تگمارک³ [۶]، یک ریاضی-فیزیک‌دان، توضیحی متفاوت عرضه کرده است و بیان داشته که «جهان خود یک ساختار ریاضی انتزاعی» است. در کنار این دیدگاه‌ها، انسان‌گرایی روبن هرش⁴ [۹]، ریاضیدان فقید، ریاضیات را بخشی از فرهنگ و تاریخ بشری می‌داند که از ماهیت فیزیولوژی و محیط فیزیکی ما سرچشمه می‌گیرد و معتقد است ساختارهای ریاضی به همان دلیلی با جهان اطرافمان تطبیق می‌کند که ریه‌های ما با جو زمین تطبیق می‌کند.

ریاضیات زبان علم است، به این معنی که بسیاری از نظریه‌های علمی با نمادها و مفاهیم ریاضی صورت بندی و بیان می‌شوند. بخشی از ریاضیات تحت عنوان ریاضیات کاربردی به مدل‌سازی و شبیه‌سازی پدیده‌ها و محاسبات مربوط به آن پرداخته و به سایر علوم برای درک و توصیف بهتر طبیعت و کنترل آن کمک می‌کند. ریاضیات کاربردی به توسعه آن روش‌های ریاضی می‌پردازد که در علوم و فناوری‌های گوناگون استفاده می‌شود.

1 Plato

2 Morris Kline

3 Max Tegmark

4 Reuben Hersh

یاری ریاضیات کاربردی به سایر حوزه‌ها برای حل مسائل آن‌ها، گاه آنقدر گسترده شده است که شاخه‌های خاصی در ریاضیات از جمله ریاضیات زیستی، ریاضیات مالی و علم داده را رقم زده است. ریاضیات کاربردی را می‌توان پل بین ریاضیات محض و دنیای بیرون خواند. پنلوپه مدی⁵ [۵]، فیلسوف ریاضی معاصر، بر اساس شواهد تاریخی در ریاضیات می‌گوید ریاضیات کاربردی در واقع کاملاً محض است، به این معنا که مانند ریاضیات محض، باید مدلی را ابداع کند که فقط با پدیده واقعی مدل شده مطابقت داشته باشد، اما به سادگی در آن پدیده قابل رویت نباشد، که خود نشان دهنده پیچیده تر بودن از آن مدل واقعی است.

ریاضیدانان محض چارچوبی مستحکم و مبانی علمی دقیقی را فراهم می‌کنند که با کمک آن‌ها ریاضیدانان کاربردی قادرند به توسعه روشهای کارآمد یا ابداع ابزارهای سودمند برای کمک به فیزیکدانان، شیمی‌دانان، زیست‌شناسان، متخصصان علوم رایانه و مهندسان در حل مسائل دنیای واقعی دست یابند. گاهی ممکن است این جریان معکوس شود، یعنی ریاضیدانان از مسائل در خارج از ریاضیات ایده بگیرند و به اثبات قضیه‌هایی در ریاضی محض بپردازند چنان‌که ارشمیدس⁶ یک مسئله هندسی را با استفاده از قانون اهرم‌ها در مکانیک اثبات کرد.

در [۲] دنیای ریاضی مانند یک هرم توصیف شده است که در قله آن کاربردهای ریاضی در سایر علوم، تجارت، و صنعت قرار دارد. در میانه آن، ریاضیات کاربردی شامل ریاضیات زیستی، ریاضیات مالی، علوم رایانه، تحقیق در عملیات، بهینه‌سازی، محاسبات علمی، آنالیز عددی، کنترل، نظریه اطلاعات، آمار و ... قابل مشاهده است و قاعده آن را ریاضیات محض متشکل از منطق، ترکیبیات، نظریه اعداد، جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه شکل داده است. اما مرز مشخصی بین این بخشها نیست و در بعضی جاها نیز در هم تنیدگی بین ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی و کاربردهای ریاضی مشاهده می‌شود. باید توجه کرد که اگر قاعده این هرم به قدر کافی بزرگ نباشد، پایداری هرم نمی‌تواند تضمین شود. برخی از دستاوردهای ریاضیدانان محض، کاربرد عملی دارند و برخی نه، اما همچنان برای نگه داشتن هرم و قوام بخشیدن به آن مورد نیاز هستند. کف هرم را مباحث مربوط به مبانی ریاضیات مانند منطق ریاضی و نظریه مجموعه‌ها تشکیل می‌دهد که به مفهوم متعارف، کاربردی تلقی نمی‌شوند، اما هرم ریاضیات بدون آنها نمی‌تواند به درستی توسعه یافته و قوام یابد.

5 Penelope Maddy

6 Archimedes

به علاوه، ریاضیات به طور عام، از طریق آموزش شیوه‌های حل مسئله، مهارت‌های شناختی و روش‌های تصمیم‌گیری فرد را بهبود می‌بخشند و نقش مهمی در شکل دادن به آنچه «تفکر منطقی» در انسان خوانده می‌شود بازی می‌کند.

ریاضیات محض در مرزهای تفکر آزاد سیر می‌کند، گرچه همیشه چشمی نیز به سرشت مسائل در سایر شاخه‌های علم دارد. ایده‌ها در ریاضیات محض بر اساس علاقه‌ی ذهنی به حل مسائل و تعمیم ساختارها ایجاد می‌شوند و ممکن است بعدها کاربردی بیابند یا نیابند. کار یک ریاضیدان محض را نباید بر اساس کاربردپذیری فوری و مستقیم نتایج قضاوت کرد. جیمز کلرک ماکسول⁷ معتقد بود که «هیچ چیز کاربردی‌تر از یک نظریه خوب نیست». گواه دیگری بر اهمیت ریاضی محض، با ملاحظه زمینه‌های تحقیقاتی برندگان مدال فیلدز حاصل می‌شود که عموماً به کسانی اهدا می‌شود که به حل مسائل بنیادی یا خلق نظریه‌های جدید در محض‌ترین شاخه‌های ریاضی پرداخته‌اند.

تاریخ ریاضی نشان داده است که آنچه در یک زمان نتایج ذهنی، مجرد و بدون کاربرد تلقی شده است اغلب در زمانی دیگر توسط سایر علوم مانند فیزیک، شیمی، علوم رایانه و مهندسی به کار برده شده است. برای اثبات این ادعا نگاهی به برخی از قسمت‌های تاریخ علم ریاضی می‌اندازیم [۷ و ۸].

1. نظریه اعداد یکی از محض‌ترین حوزه‌های ریاضی را تشکیل می‌دهد. قضیه کوچک فرما⁸ در حدود سال ۱۶۰۰ میلادی ارائه شد و امروزه ستون فقرات دستگاه رمزنگاری RSA⁹ تلقی می‌شود. RSA به طور گسترده برای ایمن‌سازی ارتباطات اینترنتی، تجارت الکترونیک و زنجیره بلوکی¹⁰ استفاده می‌شود.
2. مقاطع مخروطی در قرن سوم قبل از میلاد توسط آپولونیوس¹¹ معرفی شدند و عده زیادی آن را تمرینی برای فکر می‌دانستند تا اینکه یوهانس کپلر¹² و آیزاک نیوتون¹³ به اهمیت آن‌ها در توصیف مدار سیارات و نحوه حرکت اجرام پی بردند.

7 James Clerk Maxwell

8 Fermat's little theorem

9 Rivest-Shamir-Adleman

10 Blockchain

11 Apollonius

12 Johannes Kepler

13 Isaac Newton

3. برای حدود ۲۰۰۰ سال ریاضیدانان تلاش کردند تا اصل پنجم اقلیدس را که سرشتی تجربی نداشت از چهار اصل دیگر او استنتاج کنند. اما در قرن ۱۹، نیکلای لوباچفسکی¹⁴ و یانوش بویایی¹⁵ نشان دادند که این اصل مستقل از سایر اصول اقلیدس است و بدین ترتیب هندسه های ناقلیدسی کشف شدند. این یک کشف انقلابی اما کاملاً محض بود تا اینکه در قرن ۲۰ آلبرت اینشتین¹⁶ آن را در نظریه نسبیت عام خود به کار برد.
4. ظهور اعداد مختلط در قرن ۱۶ میلادی اتفاق افتاد و آنقدر انتزاعی بودند که آن‌ها را اعداد موهومی می نامیدند. این اعداد به تدریج کاربردهایی در خود ریاضیات برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها یافتند و در قرن بیستم کاربردهای مهم آنها در پردازش سیگنال، محاسبات مدارهای الکتریکی و مکانیک کوانتومی آشکار گردید.
5. پیدایش گرافها به اوایل قرن هجدهم بر می‌گردد زمانی که لئونارد اویلر (Leonhard Euler) مسأله هفت پل کونیگسبرگ¹⁷ را حل کرد. این حوزه به عنوان بخشی از ریاضیات محض قلمداد می‌شود اما کاربردهای زیادی در ۱۰۰ سال اخیر در تحقیق در عملیات، شیمی، علوم رایانه و نیز علوم اجتماعی یافته است.
6. نظریه ماتریسها از قرن نوزدهم بدون توجه به کاربرد آنها گسترش یافته است و اینک یک ابزار کلیدی در همه علوم از جمله کدگذاری، اقتصاد، شیمی، و ارتباطات بیسیم است.
7. تبدیل رادون در سال ۱۹۱۷ توسط یوهان رادون معرفی شد. اما در دهه ۱۹۶۰ برای برش‌نگاری¹⁸ به کار رفت.
8. تبدیل‌های موجک و فوریه در طراحی گرافیک‌های رایانه‌ای و در تجهیزات پزشکی مانند MRI، نمایشگر فشار خون و همچنین نمایشگر دیابت استفاده می‌شود.
9. توپولوژی به درک ساختارهای مولکولی کمک می‌کند و توپولوژی جبری کاربردهایی در داده کاوی پیدا کرده است.

14 Nikolai Lobachevsky

15 Janos Bolyai

16 Albert Einstein

17 Seven Bridges of Königsberg

18 Tomography

10. نظریه گروه‌ها به میزان زیادی بر توسعه نظریه اوربیتال مولکولی در شیمی و بررسی تقارن‌ها تأثیر گذاشت.

11. مسئله تصمیم در سال ۱۹۲۸ توسط ریاضیدان معروف دیوید هیلبرت (David Hilbert) به این صورت بیان شد که آیا روشی وجود دارد که بتواند درستی یا نادرستی گزاره‌های ریاضی را در تعداد متناهی مرحله تعیین کند. آلونزو چرچ (Alonzo Church) و آلن تورینگ (Alan Turing) در دهه ۱۹۳۰ به این مسئله پاسخ منفی دادند. تورینگ یک ماشین انتزاعی به نام ماشین تورینگ را صورت‌بندی کرد که آن را مبنای رایانه‌های کنونی می‌دانند.

12. جان کینز^{۱۹} نظریه اقتصادی انقلابی خود را از نظر روش شناختی از هندسه غیر اقلیدسی الهام گرفت. او برای توسعه نظریه خود، یکی از بدیهیات اساسی نظریه اقتصاد کلاسیک را زیر سوال برد.

13. نظریه گره‌ها نقش مهمی در درک این که DNA چگونه عمل می‌کند بازی می‌کند.

14. هندسه کلاسیک و معادلات دیفرانسیل جزیی در مهندسی پزشکی و طراحی لنزهای چشمی استفاده می‌شوند.

15. طبقه بندی و مشخص کردن تصویرهای دیجیتالی میلیون‌ها اثر انگشت، حجیم و تقریباً غیر قابل تصور است. نظریه موجکها امکان فشرده سازی اطلاعات را سریع، نسبتاً ساده و با هزینه خیلی کمتری انجام می‌دهد؛ به علاوه، دسترسی به اطلاعات و بازیابی آنها سریع تر انجام می‌شود.

در گروه‌های ریاضی بسیاری از دانشگاه‌های معتبر کشورهای توسعه یافته، در کنار شاخه‌های بین رشته‌ای و رشته‌های نوپدید در ریاضیات و در کنار ریاضیات کاربردی، تحقیقات در مباحث ریاضی محض از جمله منطق، نظریه مجموعه، نظریه اعداد، ترکیبیات، جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه با قوت انجام می‌شود. چرا که به ریاضیات و کاربردهای آن به عنوان یک نظام یکپارچه نگاه می‌کنند؛ دستگاهی که وجود هر قسمت و قطعه آن خواه ریاضیات محض باشد یا ریاضیات کاربردی برای درست کار کردنش ضروری است.

زندگی روزانه ما با فناوری‌های پیشرفته مانند رایانه، اینترنت، تلفن همراه هوشمند گره خورده است در حالی که مبنای علمی آن‌ها را ریاضیات تشکیل داده است. ریاضیات امنیت اطلاعات ما در تبادلات مالی را تأمین

می‌کند. همچنین در توسعه روش‌ها و ابداع دستگاه‌های پیشرفته پزشکی به کار می‌رود. این ریاضیات همگون متشکل از جنبه‌های محض و کاربردی، همواره در کشورهای پیشرفته مورد تقدیر بوده است.

در چند سال اخیر، متأثر از دیدگاه تجاری سازی علم و فناوری، بر تحقیقات زودبازده توجه بیش از حد شده است. در نتیجه آن، درخواستی افراطی در معرفی کاربرد فوری برای همه دستاوردهای فکری در جامعه دانشگاهی کشور مطرح شده است که همه حوزه‌های نظری را تحت تأثیر منفی خود قرار داده است. اندیشه آزاد، سرشت پژوهش در دانشگاه‌ها است و این درخواست آن را محدود می‌سازد و افق تاریکی برای پیشرفت علم و در نهایت فناوری در کشور ترسیم می‌کند. بدیهی است که سودمندی برای تحقیقات در حوزه‌های صنعتی مهم است اما در حوزه‌های نظری مفهومی مبهم است.

همه ما باید، به مثابه سایر کشورهای توسعه یافته، به هر دو جنبه محض و کاربردی ریاضیات توجه کنیم و دستاوردهای آن‌ها را صرفاً بر اساس عمق، وسعت و تاثیرگذاری بسنجیم. این روزها در کنفرانسها، پس از ارائه نتایج مربوط به برخی شاخه‌های ریاضی محض، به دفعات پرسش «کاربرد این نتایج چیست؟» را شنیده ایم. پرسیدن این سوال تا آنجا که با هدف کمک به ارتباط بیشتر شاخه‌های محض و کاربردی ریاضیات باشد مشکلی ندارد. ولی در بسیاری از موارد، چنین سوالی از درک نادرست ریاضیات و ساختار آن نشأت می‌گیرد و تفکری سطحی‌نگرانه را مطرح می‌سازد. بهتر است در سیاستگذاری و عملکردمان، به هر دو تحقیقات محض و کاربردی اهمیت دهیم و آن‌هایی را که از محتوای غنی ریاضی برخوردارند ارج نهیم.

سپاسگزاری: نویسنده از آقایان دکتر مجید سلیمانی دامنه و دکتر قدیر صادقی برای ارائه نکات و پیشنهادهای سازنده صمیمانه تشکر می‌کند.

مراجع و منابعی برای مطالعه بیشتر:

1. Buckley, Stephen M. *Why do research in pure mathematics?* Ir. Math. Soc. Bull. 72 (2013), 39-44.
2. ERCIM, 2008. *Introduction to the special theme: Maths for Everyday Life*. University of Helsinki, Finland.

3. Halmos, Paul R. *Applied mathematics is bad mathematics* (Finnish). In the forest of symbols (Finnish), 37--54, Art House, Helsinki, 1992.
4. Hardy, G. H. *A mathematician's apology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
5. Maddy, Penelope. *How applied mathematics became pure*. Rev. Symb. Log. **1** (2008), no. 1, 16--41.
6. Tegmark, Max. *The mathematical universe*. Found. Phys. 38 (2008), no. 2, 101--150.
7. <https://www.maynoothuniversity.ie/mathematics-and-statistics/undergraduate-studies/why-do-research-pure-mathematics>
8. <https://thescipub.com/abstract/jmssp.2014.421.422>
9. https://www.edge.org/conversation/reuben_hersh-what-kind-of-thing-is-a-number